

## Estado Limite Último - Torção Simples e Torção Combinada

### 1. Introdução

Uma estrutura sob ação das cargas nela aplicadas pode ser solicitada a dois tipos de torção:

- (a) torção de equilíbrio, e
- (b) torção de compatibilidade

Na torção de equilíbrio, a consideração dos momentos torçores na análise da estrutura é obrigatória, *independentemente de qual seja a sua rigidez*. É o caso do concreto estrutural, que pode ou não fissurar. Isto porque sem a torção, as condições de equilíbrio não se verificam. A viga curva e isostática mostrada na Figura 1 (a) exemplifica a obrigatoriedade da consideração da torção.

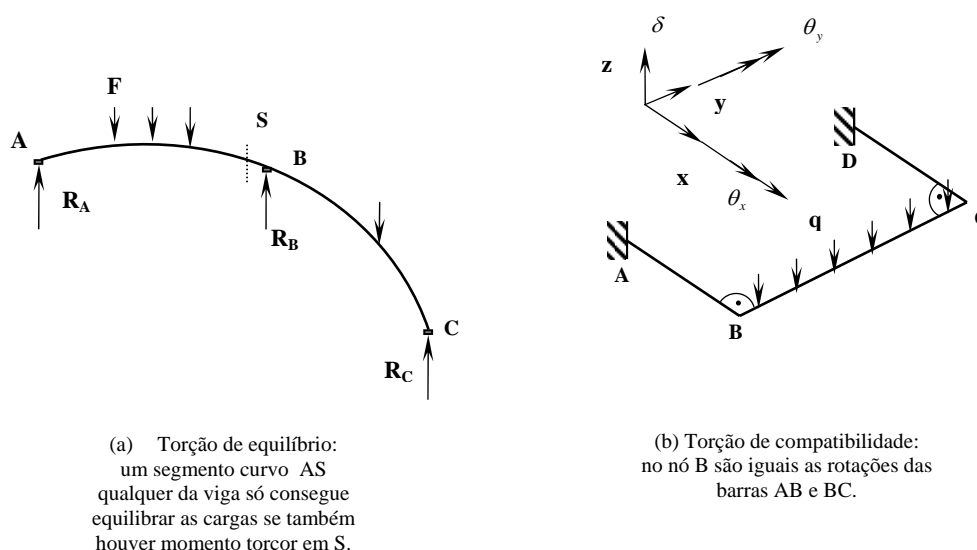


Figura 1: Torção de equilíbrio e torção de compatibilidade.

No segundo caso, a torção de compatibilidade *depende da rigidez da estrutura* e decorre de condições geométricas nos nós comuns a duas (ou mais) barras. Por exemplo, cf. a Figura 1 (b), são iguais as rotações segundo  $x$  das barras AB e BC no nó B, ou seja,  $\theta_{x,B}^{AB} = \theta_{x,B}^{BC}$ . Na primeira barra, a rotação é axial e ativa sua rigidez à torção, do que decorre o momento torçor. Na segunda barra, esta mesma rotação ativa sua rigidez à flexão. Com isto, em B, onde as barras fazem  $90^\circ$  entre si, o momento torçor em uma barra é o momento fletor na outra. É fácil ver que se em B houvesse uma rótula, a compatibilidade de

rotações deixaria de existir, i.e.,  $\theta_{x,B}^{AB} = 0$  e  $\theta_{x,B}^{BC} \neq 0$ , anulando a transmissão de momentos de uma barra para outra. Ainda assim seria possível o equilíbrio da estrutura.

Nas estruturas de concreto, a torção de compatibilidade pode ser desconsiderada na análise. Isto não quer dizer que a torção tenha desaparecido. Na realidade, as estruturas de concreto, na passagem do Estádio I (sem fissuras) para o Estádio II (com fissuras), sofrem a queda na rigidez à torção  $GJ_t$ , bem maior do que a queda na rigidez à flexão  $EI$ . Como os momentos transmitidos por compatibilidade de rotação dependem da rigidez relativa  $k = GJ_t/EI$ , eles têm, nessa passagem, seu valor bastante reduzido pela perda de rigidez por fissuração. Assim, justifica-se a desconsideração da torção de compatibilidade na análise estrutural. Entretanto, é preciso providenciar armaduras transversais e longitudinais adequadamente dimensionadas e ancoradas, *para controlar as aberturas de fissuras em serviço, e possibilitar a redistribuição de esforços solicitantes na mudança de rigidez da estrutura.*

Mostra-se, a seguir, um exemplo de redistribuição dos esforços na passagem do Estádio I para o II, na viga-balcão da Figura 1 (b). Supõe-se seção retangular  $b/h = 0,5h/h$ , e vãos  $AB = CD = a = 0,5l$  e  $BC = l$ . Adota-se o coeficiente de Poisson igual  $\nu = 0,2$ , donde  $G_c = E_c/2,4$ . Além disso, admite-se a carga  $q$  uniformemente distribuída em todo o vão BC, e as seguintes relações entre as rigidezes antes e após a fissuração:  $(GJ_t)_{II} = 0,15(GJ_t)_I$ ,  $(EI)_{II} = 0,5(EI)_I$ . Estes valores estão indicados na NBR 6118: 2003, itens 15.7.3 e 17.5.2.2. O momento transmitido de uma barra a outra, no nó B, vale:

$$M_B = -\frac{ql^2}{12} \left( \frac{k}{1+k} \right) = -\frac{ql^2}{8} \left[ \frac{2k}{3(1+k)} \right] \quad (1)$$

$$\text{com } k = \frac{G_c J_t}{E_c I}$$

No Estádio I, a constante  $k$  vale  $k_I = \frac{(GJ_t)_I}{(EI)_I}$ . No Estádio II, com as hipóteses

admitidas, tem-se  $k_{II} = \frac{(GJ_t)_{II}}{(EI)_{II}} = \frac{0,15(GJ_t)_I}{0,5(EI)_I} = 0,3k_I$ . Logo, o momento em B no

Estádio II vale:

$$M_{B,II} = -\frac{ql^2}{12} \left( \frac{k_{II}}{1+k_{II}} \right) = -\frac{ql^2}{8} \left( \frac{0,2k_I}{1+0,3k_I} \right) \quad (2)$$

Para a seção retangular do exemplo, com  $J_t = 0,229b^3h = 0,0286h^4$  e  $I = 0,0833bh^3 = 0,0417h^4$ , obtém-se  $k_I = \frac{1}{2,4} \left( \frac{0,0286}{0,0417} \right) = 0,2863$ . Com isto, os momentos nos Estádios I e II valem respectivamente:

$$M_{B,I} = -0,2225 \frac{ql^2}{8}, M_{B,II} = -0,0527 \frac{ql^2}{8}$$

Como se vê, na passagem do Estádio I para o II haverá uma redistribuição de  $\left(1 - \frac{0,0527}{0,2225}\right) \times 100 = 76,3\%$  do momento  $M_{B,I}$ . Além disso, este resultado mostra que o momento (negativo) em B, na viga BC, é apenas 5,3% do máximo momento (positivo) que seria obtido no centro vão se os nós B e C fossem rotulados, anulando a transmissão de momentos. Por conseqüência, uma estrutura como a do exemplo pode ser analisada e dimensionada como se a barra BC fosse biarticulada, *mas deve-se no dimensionamento providenciar armadura superior (negativa) de flexão nessa barra, e armaduras transversal e longitudinal (ainda que mínimas) na barras AB e CD.*

Havendo torção na peça estrutural considerada, a resistência das seções contra a torção se dá de duas formas distintas, a saber:

- (a) torção circulatoria (ou torção de Saint Venant): o momento torçor é equilibrado por tensões tangenciais que dão a volta na seção. É o caso das seções maciças ou vazadas (fechadas). As tensões tangenciais  $\tau$  originadas pela torção são concentradas, na solução plástica, na periferia da seção de modo a maximizar o braço de alavanca das forças resultantes das tensões tangenciais em cada lado da seção.

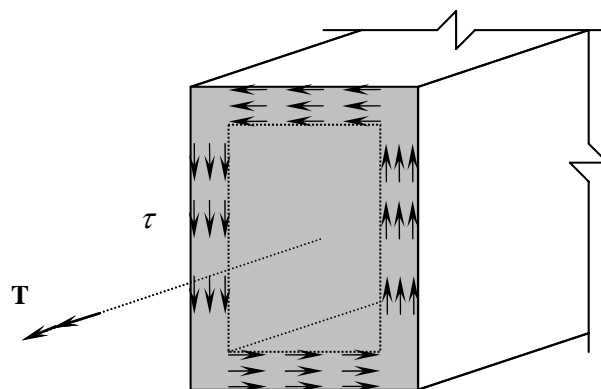


Figura 2: Torção circulatoria, seção cheia ou vazada.

(b) flexo-torção (ou torção de empenamento): é a que ocorre nos perfis de paredes delgadas. Neste caso, cf. a Figura 3 (a), o binário das tensões tangenciais circulatorias  $\tau$  têm um braço de alavanca muito pequeno (por causa da espessura  $\delta$ , também muito pequena em comparação com as demais dimensões gerais  $b/h$  da seção). Com isto, a resistência da seção (com pelo menos três chapas, não todas concorrentes) passa a se dar através de momento fletor e força cortante, com conseqüente empenamento da seção transversal, como mostra a Figura 3 (c).

No item seguinte só será estudada a torção circulatoria, mais comum em peças de concreto estrutural.

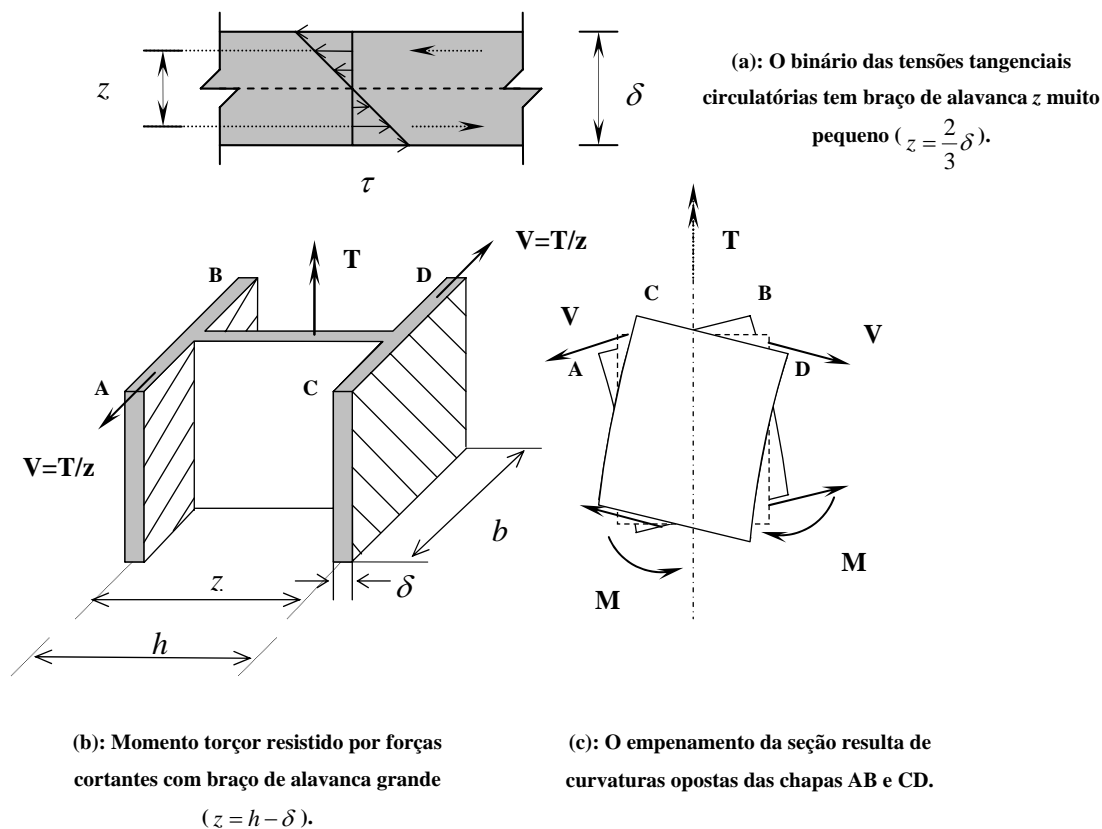


Figura 3: Flexo-torção ou torção de empenamento.

## 2. Torção circulatoria. Estado Limite Último.

### 2.1 Condições gerais.

O dimensionamento à torção no ELU baseia-se na Teoria da Plasticidade, e faz uso de duas condições da Mecânica, a saber, as condições de equilíbrio e limitação (no projeto) das resistências dos materiais, concreto e aço. As

condições de compatibilidade são descartadas. O dimensionamento à torção é feito de forma praticamente idêntica ao dimensionamento à força cortante. Em ambos os casos de tensões tangenciais, dimensiona-se uma chapa de espessura neste texto admitida constante, armada em duas direções e geralmente fissurada, sob a ação de um estado plano de tensões.

Examina-se de início a torção simples, i.e., sem combiná-la com qualquer outro esforço solicitante. Usa-se o seguinte princípio da plasticidade: *se uma seção (ou uma peça estrutural) tem mais material do que o considerado no projeto, sua capacidade portante não pode ser menor do que a calculada teoricamente*. Assim, admite-se para a torção circulatoria as hipóteses de trabalho referidas a seguir.

- (a) A seção maciça é transformada em um tubo (ou casca) resistente na sua periferia, cuja espessura é escolhida de modo a atender as duas mencionadas condições da Mecânica (equilíbrio sob ação das cargas de cálculo e limitação das resistências dos materiais a valores de cálculo). Com isto, atende-se a inequação que relaciona o momento torçor solicitante ao momento torçor resistente:

$$T_{Sd} \leq T_{Rd} \quad (3)$$

Nesta desigualdade, os subscritos *S* e *R* significam respectivamente solicitante e resistente.

- (b) O modelo resistente é o de campos *descontínuos* de tensão, como para força cortante e momento fletor, atuantes em chapas formadas pelas paredes do tubo resistente à torção. Este modelo pode ser simplificado, substituindo-se os campos de tensão pelas suas resultantes, com o que se obtém uma treliça espacial. Em qualquer caso, as compressões diagonais são atribuídas ao concreto e as trações às armaduras longitudinal e transversal. O que talvez mascare a semelhança com a resistência à força cortante de alma de vigas está no fato de alocar-se, nas vigas, a força longitudinal resistente (parcela  $|V_d| \cot \theta$ ) da chapa aos banzos (cada qual recebendo  $0,5|V_d| \cot \theta$ ). Isto se faz com vantagens, pois no banzo comprimido pelo momento fletor há uma descompressão pela ação da força cortante, dispensando armadura se a descompressão não transformar o banzo de comprimido em tracionado. Por outro lado, no banzo tracionado pelo momento fletor, há um aumento de tração pela ação da força cortante, o que possibilita melhor aproveitamento da armadura longitudinal. Não fossem estas duas vantagens, a armadura longitudinal da força cortante poderia e deveria ser distribuída na alma da viga.

Considerando, então, para a torção o mesmo modelo resistente usado para a força cortante, *trata-se de substituir o momento torçor solicitante por forças cortantes a ele estaticamente equivalentes e atuantes nas paredes do tubo*.

A inclinação  $\theta$  do campo de compressão é considerada a mesma em cada parede, e pode ser escolhida *livremente* entre  $45^\circ$  e  $26,6^\circ$ , correspondendo a  $\cot \theta$  respectivamente igual a 1 e 2. A NBR 6118: 2003 recomenda a faixa  $45^\circ$  a  $30^\circ$ . ( $\cot \theta$  pode chegar a 3 em peças protendidas ou em peças flexo-comprimidas, se projetadas e dimensionadas para não fissurar em serviço).

(c) A espessura equivalente do tubo que forma a seção resistente,  $h_e$ , pode ser *estimada* igual a:

$$h_e = \frac{A}{u} \geq 2c_1 \quad (4)$$

Nesta expressão,  $A$  é a área da seção e  $u$  é o seu perímetro,  $c_1$  é a distância entre a face lateral do elemento e o eixo da barra longitudinal de canto. Ver a Figura 4. A espessura obtida pela expressão  $h_e = \frac{A}{u}$  pode ser aumentada se a condição de segurança contra o esmagamento do concreto for crítica, ou diminuída em caso contrário (cf. Regan, 1999). Em qualquer caso, deve-se ter  $h_e \geq 2c_1$ .

Se a seção for vazada, a determinação da espessura do tubo é calculada do mesmo modo, como se a seção fosse maciça, mas  $h_e$  não pode superar a espessura real da parede  $h_{e,ef}$ . Ver a Figura 5.

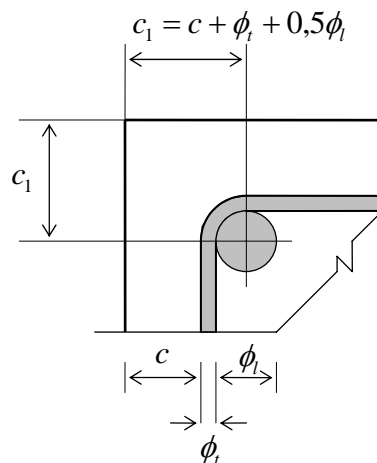


Figura 4: Dados para determinar a espessura do tubo.

Considere-se, p.ex., uma seção retangular de lados  $b/h = 400/600 \text{ mm}$ , cobrimento  $c = 30 \text{ mm}$ , diâmetro do estribo  $\phi_t = 10 \text{ mm}$ , e diâmetro da barra longitudinal de canto  $\phi_l = 20 \text{ mm}$ . De (4) resulta:

$$h_e = \frac{A}{u} = \frac{bh}{2(b+h)} = \frac{400 \times 600}{2(400+600)} = 120 \text{ mm}$$

$$h_e \geq 2c_1 = 2(30 + 10 + 0,5 \times 20) = 100 \text{ mm}$$

Logo, pode-se escolher  $h_e \geq 100 \text{ mm}$ . Escolhe-se um valor máximo se a condição de esmagamento do concreto for determinante, do contrário é melhor escolher um valor mínimo, pois resulta diminuição das áreas de armadura com o aumento do braço de alavanca. Ver adiante.

- (d) O monolitismo entre as diferentes paredes deve ser garantido através das armaduras, bem detalhadas e ancoradas nos nós comuns. Ver as Figuras 5 e 10.

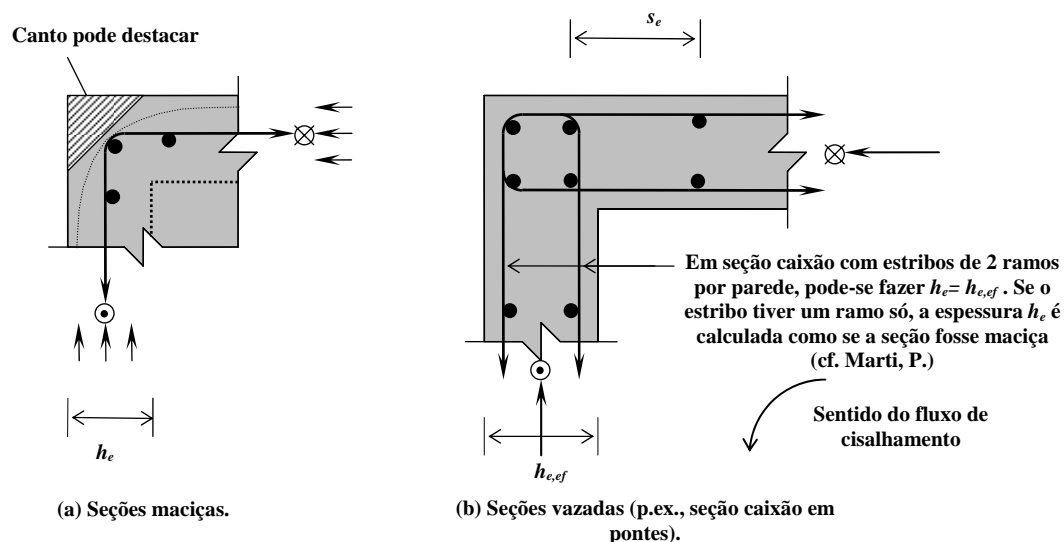


Figura 5: Dados para determinar a espessura do tubo.

## 2.2 Equações fundamentais.

As equações que permitem o dimensionamento no ELU são deduzidas a seguir para uma seção retangular, cf. a Figura 6. Entretanto, as equações deduzidas são válidas para qualquer seção poligonal convexa (cheia ou vazada). Para mais informações, ver a NBR 6118: 2003, itens 17.5 a 17.7.

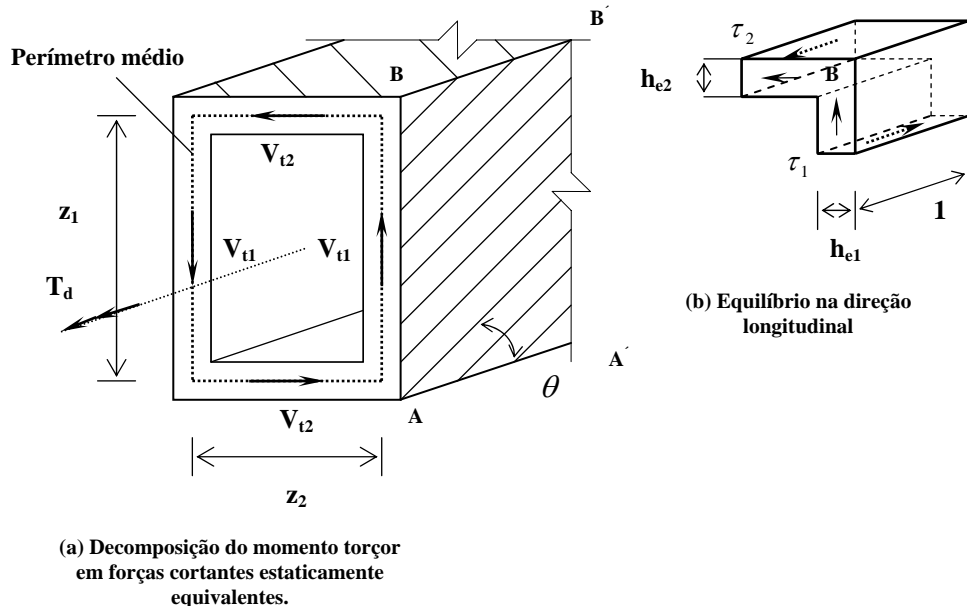


Figura 6: Forças cortantes nas paredes do tubo e equilíbrio das tensões tangenciais nos planos longitudinais.

Conforme se mostrou na Figura 2, as tensões tangenciais que equilibram o momento torçor distribuem-se uniformemente nas paredes do tubo. Na Figura 6 (b), o equilíbrio do elemento na direção longitudinal exige a igualdade:

$$\tau_1 h_{e1} = \tau_2 h_{e2} \quad (5)$$

Esta equação mostra que o produto  $\tau_i h_{ei}$  da  $i$ -ésima parede – denominado fluxo de cisalhamento – é constante na seção (dimensão  $F/L$ ). Logo, a força cortante na parede  $i$  é o produto do fluxo pelo correspondente comprimento  $z_i$  da parede.

$$V_{ti} = \tau_i h_{ei} z_i \quad (6)$$

Como as forças cortantes das diferentes paredes equilibram o momento torçor, tem-se, usando a (6):

$$T_d = V_{t1} z_2 + V_{t2} z_1 = \tau_1 h_{e1} z_1 z_2 + \tau_2 h_{e2} z_2 z_1 = \tau_i h_{ei} (2 z_1 z_2)$$

Logo, o fluxo de cisalhamento resulta igual a:

$$\tau_i h_{ei} = \frac{T_d}{2 A_e} \quad (7)$$

Esta é a fórmula de Bredt, estudada na Resistência dos Materiais.



Nesta equação, substituiu-se  $z_1 z_2$  pela área  $A_e$  contida no perímetro médio das paredes do tubo. Substituindo-se (7) em (6), obtém-se a força cortante em cada parede  $i$ :

$$V_{ti} = \frac{T_d}{2A_e} z_i \quad (8)$$

A partir deste ponto, a torção é considerada de modo inteiramente análogo ao tratamento dado à força cortante atuante na alma de uma viga. Ver a Figura 7, a qual mostra metade da face  $ABB'A'$  da peça da Figura 6.

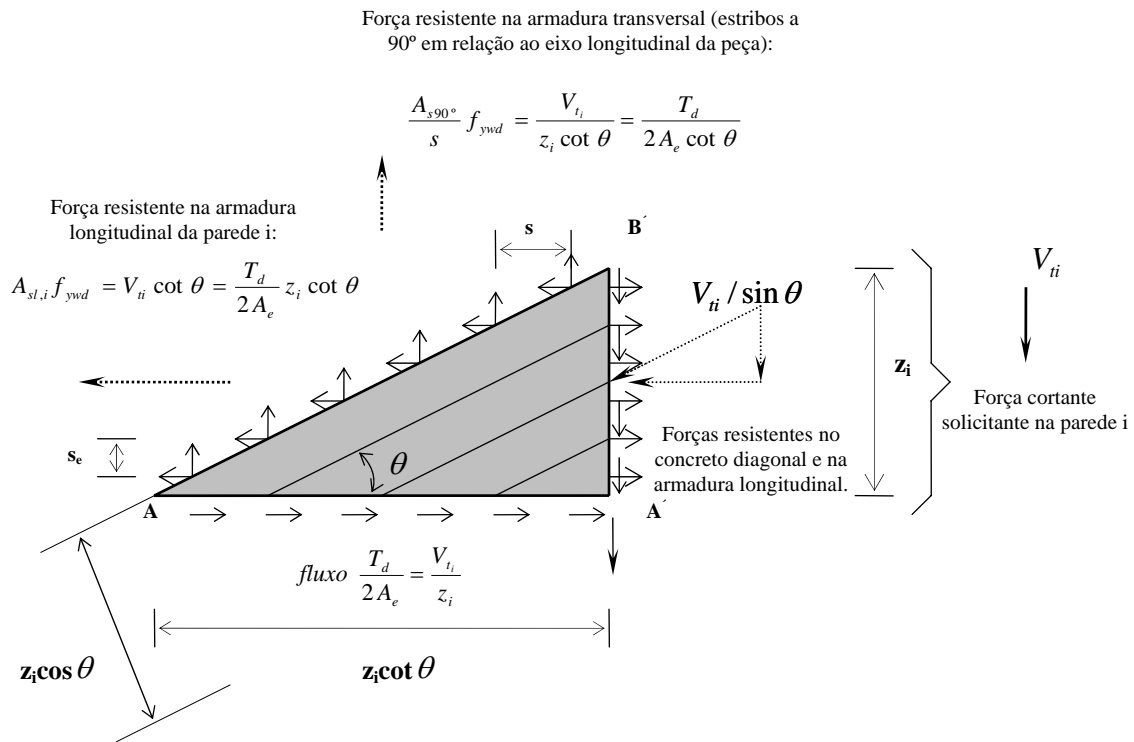


Figura 7: Forças resistentes e força solicitante na parede  $i$  do tubo.

A segurança do concreto contra esmagamento resulta dividindo-se a força de compressão diagonal  $\frac{V_{ti}}{\sin \theta}$  pela área da seção ortogonal à sua direção, a saber,  $h_{ei} z_i \cos \theta$ . Ver a Figura 7. A tensão principal resultante é limitada a um valor mais rigoroso do que o de força cortante, por causa da mudança brusca de direção do fluxo de cisalhamento nos cantos das paredes, mostrada na Figura 5 (a). A limitação estabelecida na NBR 6118: 2003 é  $\frac{f_{cd2}}{1,2}$ . Logo, para a segurança do concreto deve-se ter:

$$\sigma_{cwd,t} = \frac{V_{ti}}{\sin \theta} \left( \frac{1}{h_{ei} z_i \cos \theta} \right) = \frac{T_d}{2A_e h_{ei}} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{T_d}{A_e h_{ei}} \frac{1}{\sin(2\theta)} \leq \frac{f_{cd2}}{1,2}$$

Como  $f_{cd2} = 0,6(1 - \frac{f_{ck}}{250})f_{cd}$ , com  $f_{ck}$  em MPa, e observando que

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta, \text{ resulta:}$$

$$\sigma_{cwd,t} = \frac{T_d}{A_e h_{ei}} \frac{1}{\sin(2\theta)} = \frac{T_d}{2A_e h_{ei}} \left( \frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta \right) \leq 0,5(1 - \frac{f_{ck}}{250})f_{cd} \quad (9)$$

Como se vê nesta expressão, a compressão no concreto é máxima onde a espessura do tubo for mínima (paredes com espessuras diferentes podem ocorrer seções-caixão). A equação que contém  $\sin(2\theta)$  tem uso mais fácil quando se deseja obter o mínimo ângulo  $\theta$  possível, sem alterar a seção (ou seja,  $h_{ei}$  e  $A_e$ ) e/ou a resistência do concreto. Note-se que, se ocorrer a impossibilidade  $\sin(2\theta) > 1$ , é preciso alterar obrigatoriamente a seção e/ou a resistência do concreto.

Conforme mostra a Figura 7, a armadura transversal, ortogonal ao eixo da peça, deve resistir à força cortante  $V_{ti}$  no segmento  $z_i \cot \theta$ . Sendo  $s$  o correspondente espaçamento longitudinal, o número de estribos nesse segmento é igual a  $\frac{z_i \cot \theta}{s}$ . Como a área do estribo existente na espessura  $h_e$

do tubo é  $A_{s90^\circ}$ , tem-se a força total resistida pelos estribos,  $A_{s90^\circ} \frac{z_i \cot \theta}{s} f_{ywd}$ , igual a  $V_{ti}$ . Logo, usando a (8), obtém-se:

$$\frac{A_{s90^\circ}}{s} f_{ywd} = \frac{T_d}{2A_e \cot \theta} \quad (10)$$

Nas seções maciças, usualmente tem-se, dentro da espessura do tubo, um único ramo de estribo compondo a área  $A_{s90^\circ}$ . Se a seção for efetivamente vazada (como em seção-caixão de viga de ponte, mostrada na Figura 5 (b)), deve-se incluir em  $A_{s90^\circ}$  todos os ramos do estribo (usualmente dois) contidos na parede considerada.

A armadura longitudinal da parede  $i$  deve, por sua vez, resistir à componente longitudinal da resultante do campo de compressão,  $V_{ti} \cot \theta$ . Ver a Figura 7. Sendo  $A_{sl,i} f_{yd}$  a força total resistida pela armadura longitudinal da parede  $i$ , resulta, usando de novo a (8):

$$A_{sl,i} f_{yd} = \frac{T_d}{2A_e} z_i \cot \theta$$

Somando as forças longitudinais de todas as paredes, obtém-se, pondo  $\sum A_{sl,i} = A_{sl}$  (área total da armadura longitudinal) e  $\sum z_i = u_e$  (perímetro da parede média do tubo):

$$\frac{A_{sl}}{u_e} f_{yd} = \frac{T_d}{2 A_e} \cot \theta \quad (11)$$

Dividindo (10) e (11) entre si, obtém-se:

$$\frac{A_{sl}}{u_e} f_{yd} = \frac{A_{s90^\circ}}{s} f_{ywd} \cot^2 \theta \quad (12)$$

Esta expressão mostra que, sendo iguais as resistências das armaduras longitudinal e transversal ( $f_{yd} = f_{ywd}$ ), a armadura longitudinal por unidade de comprimento da parede média do tubo é  $\cot^2 \theta$  vezes maior que a armadura transversal por unidade de comprimento longitudinal da peça. Note-se ainda que estas duas áreas por unidade de comprimento são iguais para  $\theta = 45^\circ$ .

*Das equações (9), (10) e (11) pode-se ver que se  $\theta$  diminuir (e, portanto, se  $\cot \theta$  aumentar) aumentam a tensão de compressão no concreto e o consumo de armadura longitudinal, e simultaneamente diminui o consumo da armadura transversal.*

Para resistir à torção, os estribos devem ser fechados e devem envolver as barras da armadura longitudinal, cf. se vê na Figura 5. Valem, adicionalmente, as mesmas prescrições para os estribos de força cortante. Nos cantos do estribo deve existir uma barra longitudinal de diâmetro pelo menos igual a 10 mm. A armadura longitudinal pode ser concentrada nos cantos das paredes, se a respectiva altura não superar 350 mm.

A taxa geométrica mínima das armaduras de torção é estabelecida no item 17.5.1.2 da NBR 6118: 2003. Para a seção retangular, essa taxa vale:

$$\rho_{sl} = \rho_{sw} \geq 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (13)$$

$$\rho_{sw} = \frac{A_{sw}}{b_w s}, \rho_{sl} = \frac{A_{sl}}{b_w u_e}$$

onde  $f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$ , em MPa, e  $f_{ywk} = 500$  MPa para o CA-50 e CA-60. Como se vê, a taxa geométrica da armadura transversal mínima é a mesma estabelecida para força cortante. A taxa geométrica mínima da armadura longitudinal pressupõe seu volume, por unidade de comprimento longitudinal da peça, igual ao volume da armadura transversal nesse mesmo comprimento.

### 3. Torção combinada com força cortante

A torção dificilmente aparece sozinha nas estruturas, como aliás acontece também com os demais esforços solicitantes. No caso de atuação simultânea de momento torçor e força cortante, a NBR 6118: 2003 permite calcular as armaduras em separado e somá-las em seguida. Neste cálculo, adota-se o mesmo ângulo  $\theta$  para ambas as solicitações.

A verificação da segurança do concreto da diagonal, na parede onde as tensões tangenciais da força cortante e da torção se somam, por terem o mesmo sentido, é dada pela seguinte condição:

$$\frac{\sigma_{cwt,V}}{f_{cd2}} + \frac{\sigma_{cwt,T}}{\left(\frac{f_{cd2}}{1,2}\right)} \leq 1 \quad (14)$$

$$\sigma_{cwt,V} = \frac{V_d}{b_w z} \frac{2}{\sin(2\theta)} = \frac{V_d}{b_w z} \left( \frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta \right)$$

$$\sigma_{cwt,T} = \frac{T_d}{A_e h_e} \frac{1}{\sin(2\theta)} = \frac{T_d}{2A_e h_e} \left( \frac{1}{\cot \theta} + \cot \theta \right)$$

Nestas expressões, ambos os esforços são tomados em valor absoluto, como no dimensionamento das armaduras. Na expressão de  $\sigma_{cwt,V}$ , a distância  $z$  entre os banzos comprimido e tracionado pelo momento fletor pode ser estabelecida como aquele da seção de momento máximo, obtido no dimensionamento à flexão no ELU. A NBR 6118: 2003 adota, como simplificação, o valor  $z = 0,9d$ , sendo  $d$  a altura útil da seção de momento máximo.

A força no banzo inferior (ou mais tracionado), considerando-se as influências dos três esforços solicitantes, é igual a:

$$R_{s,inf} = \frac{M_d}{z} + \frac{1}{2} |V_d| \cot \theta + |V_{dt,inf}| \cot \theta$$

onde  $V_{dt,inf}$  é a força cortante na parede inferior proveniente da torção. Seu valor é dado pela Equação (8), com  $z_i = b - h_e$ . Logo:

$$R_{s,inf} = \frac{M_d}{z} + \frac{1}{2} |V_d| \cot \theta + \frac{|T_d|}{2A_e} (b - h_e) \cot \theta \quad (15a)$$

No banzo superior (ou comprimido ou menos tracionado), tem-se:

$$R_{s,sup} = -\frac{M_d}{z} + \frac{1}{2} |V_d| \cot \theta + \frac{|T_d|}{2A_e} (b - h_e) \cot \theta \quad (15b)$$

Estas expressões são válidas nas zonas B (zonas da viga sem mudança brusca de carga, e/ou geometria e/ou armadura). Nelas, só o momento fletor deve entrar com seu sinal, pois tanto a força cortante quanto o momento torçor sempre produzem tração longitudinal, independentemente dos respectivos sinais.

Na equação da força do banzo comprimido ou menos tracionado aparecem as influências do momento fletor e da força cortante (parcelas  $-\frac{M_d}{z}$  e  $\frac{1}{2}|V_d|\cot\theta$ ), as quais são desprezadas no dimensionamento da armadura longitudinal desse banzo, cf. a NBR 6118: 2003. É possível diminuir a armadura calculada apenas com a parcela oriunda do momento torçor, desde que se obedeça a valores mínimos da armadura e as barras de canto tenham diâmetro pelo menos igual ao mínimo especificado em norma. *Para que a desconsideração dessas duas parcelas esteja a favor da segurança, é necessário que no banzo comprimido (ou menos tracionado) se verifique a seguinte condição:*

$$-\frac{M_d}{z} + \frac{1}{2}|V_d|\cot\theta + \frac{|T_d|}{2A_e}(b-h_e)\cot\theta \leq \frac{|T_d|}{2A_e}(b-h_e)\cot\theta$$

Ou seja:

$$M_d \geq \frac{1}{2}|V_d|z\cot\theta \quad (16)$$

Se esta inequação não se verificar, é mais desfavorável dimensionar a armadura pela Equação (15b).

#### 4. Exemplos

4.1 Dimensionar a viga de seção retangular em balanço da Figura 8 sujeita unicamente a um binário aplicado em sua extremidade. A seção transversal é quadrada. Adotar  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e CA-50, cobrimento  $c = 30 \text{ mm}$ , estribo  $\phi_t = 10 \text{ mm}$  e armaduras longitudinais  $\phi_l = 16 \text{ mm}$  nos cantos e  $\phi_t = 10 \text{ mm}$  nas faces.

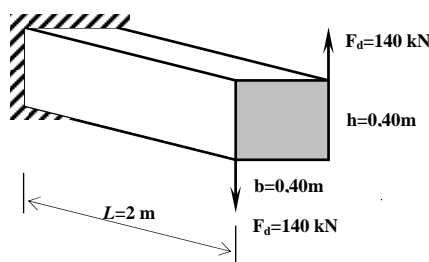


Figura 8: Viga sob torção simples.

Como se vê, esta viga tem como esforço solicitante unicamente um momento torçor constante e igual a  $T_d = F_d b = 140 \times 0,40 = 56 \text{ kNm}$ .

Geometria do tubo resistente:

$$h_e = \frac{400^2}{4 \times 400} = 100 \text{ mm} \geq 2c_1 = 2 \times (30 + 10 + 0,5 \times 16) = 2 \times 48 = 96 \text{ mm}, \text{ donde,}$$

$$h_e = 100 \text{ mm}, A_e = (b - h_e)(h - h_e) = 300^2 = 90000 \text{ mm}^2, u_e = 4 \times 300 = 1200 \text{ mm}.$$

Determinação de  $\theta$ : da condição de segurança do concreto dada por (14) obtém-se

$$\sigma_{cwl,T} = \frac{T_d}{A_e h_e \sin(2\theta)} = \frac{56 \times 10^6}{90000 \times 100 \times \sin(2\theta)} \leq \frac{f_{cd2}}{1,2} = 0,5 \left(1 - \frac{20}{250}\right) \frac{20}{1,4} = 6,57 \text{ MPa}$$

Donde,  $\sin(2\theta) \geq 0,947$ , ou seja,  $2\theta \geq 71,2^\circ$ . Escolhe-se  $\theta = 35,5^\circ$ ,  $\cot \theta = 1,4$ .

Armaduras: de (10) e (11) resultam

$$\frac{A_{s90^\circ}}{s} = \frac{56 \times 10^6}{2 \times 90000 \times 1,4 \times 435} = 0,511 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} = 511 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$\frac{A_{sl}}{u_e} = \frac{56 \times 10^6}{2 \times 90000 \times 435} \times 1,4 = 1,001 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}} = 1001 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Escolhe-se estribo  $\phi_t = 10 \text{ mm}$ ,  $A_{s90^\circ} = 80 \text{ mm}^2$ , donde o espaçamento  $s = \frac{80}{511} = 0,157 \cong 0,15 \text{ m}$ .

A armadura longitudinal total no perímetro  $u_e = 1,4 \text{ m}$  vale  $A_{sl} = 1001 \times 1,4 = 1401 \text{ mm}^2$ . Pode-se adotar  $4\phi 16$ , uma barra em cada canto do estribo, e adicionalmente  $2\phi 10$  uniformemente espaçados em cada uma das 4 faces, perfazendo um total efetivo igual a  $A_{sl} = 4 \times 200 + 4 \times (2 \times 80) = 1440 \text{ mm}^2$ .

*As barras longitudinais devem ser bem ancoradas tanto no engaste quanto na seção onde se aplica o binário.* Além disso, os estribos devem ser fechados, com ganchos dobrados a  $135^\circ$ , fazendo, portanto,  $45^\circ$  com os seus ramos.

A armadura mínima no caso não prevalece, pois de (13) obtém-se:

$$\rho_{sl} = \rho_{sw} \geq 0,2 \frac{0,3 \times 20^{2/3}}{500} = 0,088 \%, \left(\frac{A_{sw}}{s}\right)_{\min} = \left(\frac{A_{sl}}{u_e}\right)_{\min} = \frac{0,088}{100} \times 400 = 0,354 \frac{\text{mm}^2}{\text{mm}}.$$

4.2 Dimensionar no ELU a seção retangular da Figura 9 sujeita aos esforços  $V_d = 215 \text{ kN}$ ,  $M_d = 188,1 \text{ kNm}$  e  $T_d = 55,9 \text{ kNm}$  atuantes *simultaneamente*. Dados:

Resistências:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ , aço CA-50.

Geometria da seção:  $b/h = 300/600 \text{ mm}$ , distância da borda da seção ao eixo da barra de canto  $c_1 = 50 \text{ mm}$ , cobrimento  $c = 30 \text{ mm}$ , diâmetro do estribo  $\phi_t = 10 \text{ mm}$ .

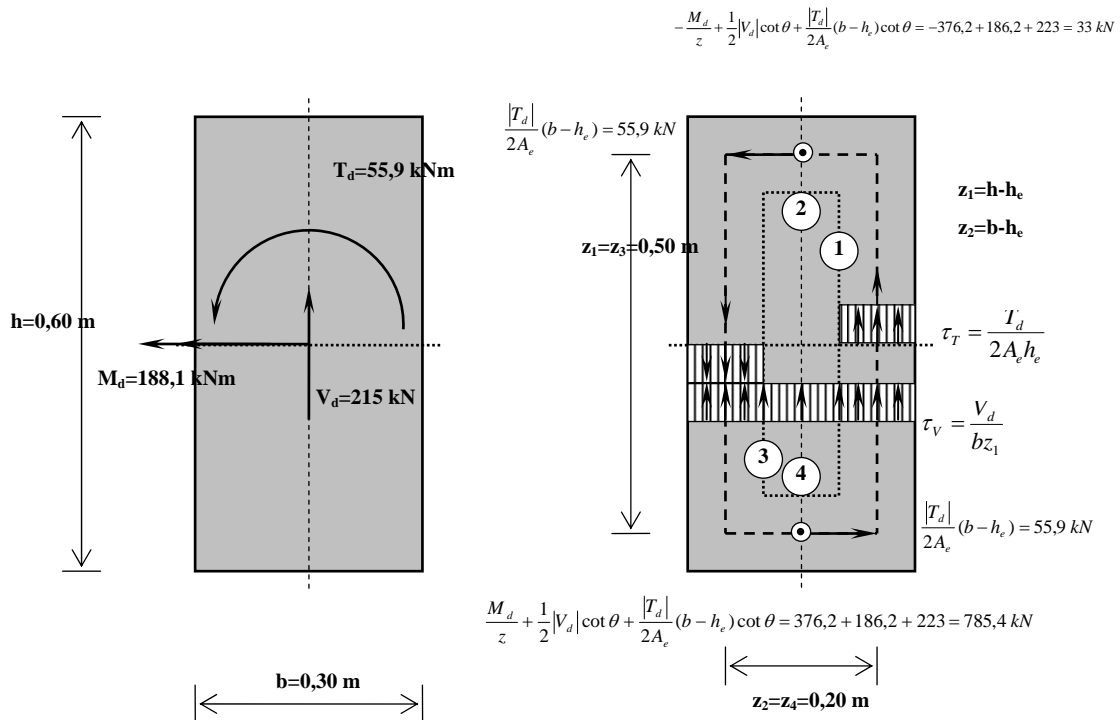


Figura 9: (a) Geometria da seção e esforços solicitantes; (b) Decomposição dos esforços solicitantes.

1º Passo: Geometria do tubo resistente

$$h_e = \frac{A}{u} = \frac{bh}{2(b+h)} = \frac{300 \times 600}{2 \times 900} = 100 \text{ mm}, \text{ e } h_e \geq 2c_1 = 2 \times 50 = 100 \text{ mm}. \text{ Logo,}$$

$$h_e = h_{e,ef} = 100 \text{ mm}, A_e = 200 \times 500 = 10^5 \text{ mm}^2, u_e = 2 \times (200 + 500) = 1400 \text{ mm}.$$

2º Passo: Verificação da segurança do concreto diagonal para a ação simultânea de  $V_{Sd}$  e  $T_{Sd}$ . Ver as Equações (14).

Esforços solicitantes:  $V_{Sd} = 215 \text{ kN}$  e  $T_{Sd} = 55,90 \text{ kNm}$

Tensões de compressão na diagonal:

$$\sigma_{c_{wd,V}} = \frac{V_{Sd}}{b_w z} \frac{2}{\sin(2\theta)} = \frac{215 \times 10^3}{300 \times 466} \frac{2}{\sin(2\theta)} = \frac{3,076}{\sin(2\theta)}$$

$$\sigma_{c_{wd,T}} = \frac{T_{Sd}}{A_e h_e} \frac{1}{\sin(2\theta)} = \frac{55,9 \times 10^6}{10^5 \times 100 \times \sin(2\theta)} = \frac{5,6}{\sin(2\theta)}$$

Resistências: para a força cortante:  $f_{cd2} = 0,6(1 - \frac{30}{250}) \frac{30}{1,4} = 11,31 \text{ MPa}$ , e

para o momento torçor:  $\frac{f_{cd2}}{1,2} = \frac{11,31}{1,2} = 9,43 \text{ MPa}$ .

Condição de segurança:  $\frac{\sigma_{c_{wd,V}}}{f_{cd2}} + \frac{\sigma_{c_{wd,T}}}{(\frac{f_{cd2}}{1,2})} \leq 1$  ou

$$(\frac{3,076}{11,31} + \frac{5,6}{9,43}) \frac{1}{\sin(2\theta)} \leq 1, \text{ donde } \sin(2\theta) \geq 0,866, \text{ e } 2\theta \geq 60^\circ \text{ ou } \theta \geq 30^\circ.$$

Adota-se  $\theta = 30^\circ$ . Note-se que a influência da torção é preponderante neste exemplo.

Como  $\frac{\sigma_{c_{wd,V}}}{f_{cd2}} + \frac{\sigma_{c_{wd,T}}}{(\frac{f_{cd2}}{1,2})} = 0,31 + 0,69 = 1 > \frac{2}{3}$ , o espaçamento máximo do estribo é

limitado ao menor dos dois valores seguintes:

$$\max s = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,3d = 0,3 \times 550 = 165 \text{ mm} \\ 200 \text{ mm} \end{array} \right\} = 165 \text{ mm}$$

Se ocorresse o oposto na desigualdade acima, seria:

$$\max s = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,6d \\ 300 \text{ mm} \end{array} \right\}$$

3º Passo: Armaduras de força cortante

Armadura transversal (Estribos verticais de 2 ramos, ou seja, a área  $A_{sw}$  refere-se a 2 ramos):



$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{sd}}{(z \cot \theta) f_{ywd}} = \frac{215 \times 10^3}{466 \times 1,732 \times 435} = 0,612 \frac{mm^2}{mm} = 612 \frac{mm^2}{m}$$

Armadura longitudinal (somente no banzo inferior tracionado, pois o superior sofre descompressão pela mesma parcela  $\frac{1}{2} V_{sd} \cot \theta = 186,2 \text{ kN}$  e pela ação do momento torção):

$$A_{sl,V} = \frac{1}{2} \frac{V_{sd} \cot \theta}{f_{yd}} = \frac{0,5 \times 215 \times 10^3 \times 1,732}{435} = 428 \text{ mm}^2$$

4º Passo: Armaduras de torção. Ver as equações (10) e (11).

Armadura transversal:

$$\frac{A_{s90^\circ}}{s} = \frac{T_d}{(2A_e \cot \theta) f_{ywd}} = \frac{55,9 \times 10^6}{2 \times 10^5 \times 1,732 \times 435} = 0,371 \frac{mm^2}{mm} = 371 \frac{mm^2}{m}$$

Armadura longitudinal:

$$\frac{A_{sl}}{u_e} = \frac{T_d}{2A_e f_{yd}} \cot \theta = \left( \frac{A_{s90^\circ}}{s} \right) \cot^2 \theta = 371 \times 3 = 1113 \frac{mm^2}{m}$$

5º Passo: Composição da armadura

(a) Estribos verticais de 2 ramos

Observando que  $A_{s90^\circ}$  é a área de 1 ramo do estribo, ao passo que  $A_{sw}$  é a área de 2 ramos do estribo, um em cada face lateral da viga, obtém-se a área total de estribos de 2 ramos igual a:

$$\left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_{V+T} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right)_V + 2 \times \left( \frac{A_{s90^\circ}}{s} \right)_T = 612 + 2 \times 371 = 1354 \frac{mm^2}{m}$$

A área total de um estribo  $\phi 10$ , 2 ramos, é igual a  $A_{sw} = 2 \times 80 = 160 \text{ mm}^2$ , donde o espaçamento longitudinal:

$$s = \frac{160}{1354} = 0,118 \cong 0,10 \text{ m} \leq \max s = 0,165 \text{ m}.$$

(b) Armadura longitudinal no banzo inferior.

A força do banzo inferior decorre da Equação (15a). Dividindo-a pela resistência  $f_{yd}$  do aço, obtém-se a área total da armadura longitudinal nesse banzo.

$$R_{s,inf} = \frac{188,1}{0,50} + \frac{215}{2} \cot 30^\circ + \frac{55,9 \times 10^3}{2 \times 10^5} 200 \cot 30^\circ$$

$$R_{s,inf} = 376,2 + 186,2 + 96,8 = 659,2 \text{ kN}$$

$$A_{sl,inf} = \frac{R_{s,inf}}{f_{yd}} = 865 + 428 + 223 = 1515 \text{ mm}^2$$

Adota-se  $5\phi 20 = 1575 \text{ mm}^2$ . A parcela excedente pode ser alocada às duas faces laterais, donde a área  $(1575 - 1515)/2 = 30 \text{ mm}^2$  para cada uma.

(b) Armadura longitudinal nas faces verticais e na face superior:

Deve-se usar  $\phi_l \geq 10 \text{ mm}$  nos cantos do estribo, e espaçamento  $s_e$  ao longo do perímetro  $u_e$  não superior a  $0,35 \text{ m}$ .

A armadura longitudinal total devida à torção vale  $A_{sl,T} = 1113 \times 1,4 = 1558 \text{ mm}^2$ . Em cada face maior deve-se ter a parcela:

$$\frac{(h - h_e)}{u_e} A_{sl,T} = \frac{0,50}{1,40} 1558 = 556 \text{ mm}^2$$

E em cada face menor:

$$\frac{(b - h_e)}{u_e} A_{sl,T} = \frac{0,20}{1,40} 1558 = 223 \text{ mm}^2$$

A armadura excedente da face menor também pode ser computada nas faces maiores. Dispondo-se 3 barras de diâmetro  $\phi_l = 12,5 \text{ mm}$  na face superior, sobra para cada face maior a área  $[3 \times 125 - 223]/2 = 76 \text{ mm}^2$ .

Finalmente, em cada face lateral deve-se ter:

$$(556 - 76 - 30) = 450 \text{ mm}^2$$

Adota-se  $4\phi 12,5 = 500 \text{ mm}^2$  entre as barras de canto, com espaçamento  $s_e = 10 \text{ cm}$ .

Ver na Figura 10 a disposição da armadura na seção transversal.

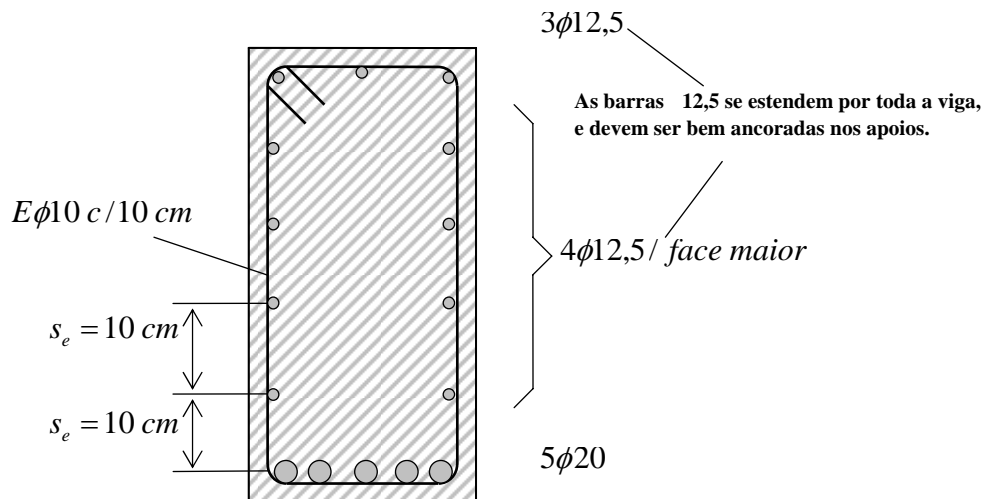


Figura 10: Detalhamento da armadura na seção transversal.

Por último, note-se na Figura 9 (b) que a armadura do banzo superior – neste exemplo, tracionado – está em excesso, a favor da segurança com a desconsideração dos efeitos do momento fletor e da força cortante, pois a inequação (16) se verifica:

$$M_d = 188,1 \text{ kNm} \geq \frac{1}{2} |V_d| z \cot \theta = \frac{215}{2} 0,50 \times \cot 30^\circ = 93,10 \text{ kNm}$$

Somente se o momento fletor fosse menor que 93,1 kNm (e mesmo negativo), seria mais desfavorável calcular a armadura do banzo superior com a influência dos três esforços, através de (15b).

## 5. Bibliografia

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**: NBR 6118: 2003. Rio de Janeiro, 2003.

BUCHAIM, R. **Estado Limite Último – Força Cortante**. CTU - Departamento de Estruturas. UEL, Londrina, 2005. Disponível em: <http://www.uel.br/ctu/dtru/DISCIPLINAS/3tru024/3tru024.html>

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. **Prestressed concrete basics**. Ottawa: Canadian Prestressed Concrete Institute, 1987.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990**. London: Thomas Telford, 1993.

MARTI, P. u. a. **Autographie Stahlbeton GZ I Und II**. Zürich: Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK), 2001(?).

REGAN, P. Ultimate limit state principles. In. FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **Structural Concrete**: textbook on behavior, design and performance. Lausanne , 1999. v. 2, p. 141-223.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. Konstruieren im Stahlbetonbau. In: GOTTHARD, F. (Org.). **Beton-Kalender**. Berlin: Ernst & Sohn Verlag, 1989, T. II, p. 563-715.