

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

UNESP - Campus de Bauru/SP

FACULDADE DE ENGENHARIA

Departamento de Engenharia Civil

Disciplina: 2323 - ESTRUTURAS DE CONCRETO II

NOTAS DE AULA

PILARES DE CONCRETO ARMADO

Prof. Dr. PAULO SÉRGIO DOS SANTOS BASTOS

(wwwp.feb.unesp.br/pbastos)

Bauru/SP
Agosto/2015

APRESENTAÇÃO

Esta apostila tem o objetivo de servir como notas de aula na disciplina 2323 – Estruturas de Concreto II, do curso de Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia, da Universidade Estadual Paulista – UNESP, Campus de Bauru/SP.

O texto apresenta parte das prescrições contidas na NBR 6118/2014 (“*Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*” – versão corrigida) para o dimensionamento de pilares de Concreto Armado. O dimensionamento dos pilares é feito com base nos métodos do pilar padrão com curvatura e rigidez aproximadas. Outros métodos constantes da norma não são apresentados, e são estudados os pilares de seção retangular e somente os de nós fixos (contraventados), com índice de esbeltez até 90.

A apresentação do dimensionamento dos pilares é feita em função da classificação que os individualiza em pilares intermediários, de extremidade e de canto. Vários exemplos numéricos estão apresentados para cada um deles.

O item 2 (Cobrimento da Armadura) não é específico dos pilares, porém, foi inserido no texto porque é muito importante no projeto, e contém alterações em relação à versão anterior da norma (2003). No item 4 (Conceitos Iniciais) são apresentadas algumas informações básicas iniciais e os conceitos relativos ao chamado “Pilar Padrão”, cujo modelo é utilizado pela NBR 6118 para a determinação aproximada do momento fletor de segunda ordem. Por último são apresentados exemplos numéricos de dimensionamento de pilares de um edifício baixo e com planta de fôrma simples.

O autor agradece aos estudantes que colaboraram no estudo dos pilares, Antonio Carlos de Souza Jr., Caio Gorla Nogueira, João Paulo Pila D’Aloia, Rodrigo Fernando Martins e ao técnico Éderson dos Santos Martins, pela confecção de desenhos.

Críticas e sugestões são bem-vindas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	AGRESSIVIDADE DO AMBIENTE.....	1
3	QUALIDADE DO CONCRETO DE COBRIMENTO.....	1
4	ESPESSURA DO COBRIMENTO DA ARMADURA.....	2
5	CONCEITOS INICIAIS.....	4
5.1	Solicitações Normais.....	4
5.2	Flambagem.....	4
5.3	Não-linearidade Física e Geométrica.....	5
5.4	Equação da Curvatura de Elementos Fletidos.....	6
5.5	Compressão Axial.....	8
5.6	Pilar-Padrão.....	9
6	NOÇÕES DE CONTRAVENTAMENTO DE ESTRUTURAS.....	11
6.1	Estruturas de Nós Fixos e Móveis.....	12
6.2	Elementos Isolados.....	14
7	EXCENTRICIDADES.....	14
7.1	Excentricidade de 1ª Ordem.....	14
7.2	Excentricidade Acidental.....	14
7.3	Excentricidade de 2ª Ordem.....	15
7.4	Excentricidade Devida à Fluência.....	16
8	ÍNDICE DE ESBELTEZ.....	17
9	DETERMINAÇÃO DOS EFEITOS LOCAIS DE 2ª ORDEM.....	19
9.1	Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada.....	19
9.2	Método do Pilar-Padrão com Rigidez κ Aproximada.....	21
10	SITUAÇÕES BÁSICAS DE PROJETO.....	22
10.1	Pilar Intermediário.....	22
10.2	Pilar de Extremidade.....	23
10.3	Pilar de Canto.....	24
11	DETERMINAÇÃO DA SEÇÃO SOB O MÁXIMO MOMENTO FLETOR.....	25
12	SITUAÇÕES DE PROJETO E DE CÁLCULO.....	26
12.1	Pilar Intermediário.....	27
12.2	Pilar de Extremidade.....	27
12.3	Pilar de Canto.....	28
13	CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL COM AUXÍLIO DE ÁBACOS.....	29
13.1	Flexão Composta Normal.....	29
13.2	Flexão Composta Oblíqua.....	30
14	RELAÇÃO ENTRE A DIMENSÃO MÍNIMA E O COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO.....	31
15	CÁLCULO DOS PILARES INTERMEDIÁRIOS.....	32
15.1	Roteiro de Cálculo.....	32
15.2	Exemplos Numéricos.....	33
15.2.1	Exemplo 1.....	33
15.2.2	Exemplo 2.....	37
16	CÁLCULO DOS PILARES DE EXTREMIDADE.....	40
16.1	Roteiro de Cálculo.....	40
16.2	Exemplos Numéricos.....	41
16.2.1	Exemplo 1.....	41
16.2.2	Exemplo 2.....	46
16.2.3	Exemplo 3.....	51
16.2.4	Exemplo 4.....	54
17	CÁLCULO DOS PILARES DE CANTO.....	58

17.1	Roteiro de Cálculo.....	58
17.2	Exemplos Numéricos.....	58
17.2.1	Exemplo 1.....	59
17.2.2	Exemplo 2.....	62
17.2.3	Exemplo 3.....	66
18	DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS	70
18.1	Armadura Longitudinal de Pilares.....	71
18.1.1	Diâmetro Mínimo	71
18.1.2	Distribuição Transversal	71
18.1.3	Armadura Mínima e Máxima.....	71
18.1.4	Detalhamento da Armadura	72
18.1.5	Proteção contra Flambagem.....	72
18.2	Armadura Transversal de Pilares.....	73
18.3	Pilares-Parede.....	74
19	ESTIMATIVA DA CARGA VERTICAL NO PILAR POR ÁREA DE INFLUÊNCIA	74
20	PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO PILAR	75
21	DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE UMA EDIFICAÇÃO DE BAIXA ALTURA	76
21.1	Pilar Intermediário P8.....	78
21.2	Pilar de Extremidade P5	83
21.3	Pilar de Extremidade P6	89
21.4	Pilar de Canto P1	93

1 INTRODUÇÃO

Pilares são “Elementos lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes.” (NBR 6118/2014¹, item 14.4.1.2).

Pilares-parede são “Elementos de superfície plana ou casca cilíndrica, usualmente dispostos na vertical e submetidos preponderantemente à compressão. Podem ser compostos por uma ou mais superfícies associadas. Para que se tenha um pilar-parede, em alguma dessas superfícies a menor dimensão deve ser menor que 1/5 da maior, ambas consideradas na seção transversal do elemento estrutural.” (item 14.4.2.4).

O dimensionamento dos pilares é feito em função dos esforços externos solicitantes de cálculo, que compreendem as forças normais (N_d), os momentos fletores (M_{dx} e M_{dy}) e as forças cortantes (V_{dx} e V_{dy}) no caso de ação horizontal.

A NBR 6118, na versão de 2003, fez modificações em algumas das metodologias de cálculo das estruturas de Concreto Armado, como também em alguns parâmetros aplicados no dimensionamento e verificação das estruturas. Especial atenção é dada à questão da durabilidade das peças de concreto. Particularmente no caso dos pilares, a norma introduziu várias modificações, como no valor da excentricidade accidental, um maior cobrimento de concreto, uma nova metodologia para o cálculo da esbeltez limite relativa à consideração ou não dos momentos fletores de 2ª ordem e, principalmente, com a consideração de um momento fletor mínimo, que pode substituir o momento fletor devido à excentricidade accidental. A versão de 2014 mantém essas prescrições, e introduziu que a verificação do momento fletor mínimo pode ser feita comparando uma envoltória resistente, que englobe a envoltória mínima com 2ª ordem.

No item 17.2.5 (“Processo aproximado para o dimensionamento à flexão composta oblíqua”) a NBR 6118 apresenta um método simplificado para o projeto de pilares sob flexão composta normal e oblíqua, que não será apresentado neste texto.

Os três itens seguintes (2,3 e 4) foram inseridos no texto porque são muito importantes no projeto de estruturas de concreto, especialmente o cobrimento da armadura pelo concreto.

2 AGRESSIVIDADE DO AMBIENTE

Segundo a NBR 6118 (item 6.4.1), “A agressividade do meio ambiente está relacionada às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento das estruturas.”

Nos projetos das estruturas correntes, a agressividade ambiental deve ser classificada de acordo com o apresentado na Tabela 1 e pode ser avaliada, simplificada, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes (item 6.4.2).

Conhecendo o ambiente em que a estrutura será construída, o projetista estrutural pode considerar uma condição de agressividade maior que aquelas mostradas na Tabela 1.

3 QUALIDADE DO CONCRETO DE COBRIMENTO

Conforme a NBR 6118 (item 7.4), a “... durabilidade das estruturas é altamente dependente das características do concreto e da espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura.”

“Ensaaios comprobatórios de desempenho da durabilidade da estrutura frente ao tipo e classe de agressividade prevista em projeto devem estabelecer os parâmetros mínimos a serem atendidos. Na falta destes e devido à existência de uma forte correspondência entre a relação água/cimento e a resistência à compressão do concreto e sua durabilidade, permite-se que sejam adotados os requisitos mínimos expressos” na Tabela 2.

O concreto utilizado deve cumprir com os requisitos contidos na NBR 12655 e diversas outras normas (item 7.4.3). Para parâmetros relativos ao Concreto Protendido consultar a Tabela 7.1 da NBR 6118.

¹ ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, NBR 6118. ABNT, 2014, 238p.

*Tabela 1 – Classes de agressividade ambiental – CAA.
(Tabela 6.1 da NBR 6118).*

Classe de agressividade Ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de Projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana ^{1, 2}	Pequeno
III	Forte	Marinha ¹	Grande
		Industrial ^{1, 2}	
IV	Muito forte	Industrial ^{1, 3}	Elevado
		Respingos de maré	

NOTAS: 1) Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).
2) Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.
3) Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

*Tabela 2 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e qualidade do Concreto Armado.
(Tabela 7.1 da NBR 6118).*

Concreto	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
	I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,45$
Classe de concreto (NBR 8953)	$\geq C20$	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C40$

4 ESPESSURA DO COBRIMENTO DA ARMADURA

Define-se cobrimento de armadura a espessura da camada de concreto responsável pela proteção da armadura num elemento. Essa camada inicia-se a partir da face mais externa da barra de aço e se estende até a superfície externa do elemento em contato com o meio ambiente. Em vigas e pilares é comum a espessura do cobrimento iniciar na face externa dos estribos da armadura transversal, como mostrado na Figura 1.

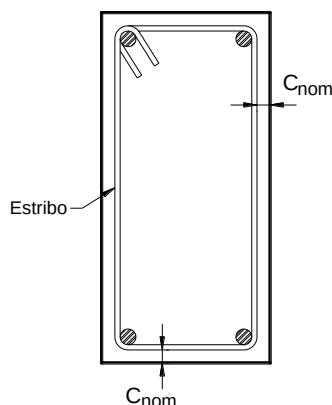


Figura 1 – Espessura do cobrimento da armadura pelo concreto.

A NBR 6118 (item 7.4.7.1) define o cobrimento mínimo da armadura como “o menor valor que deve ser respeitado ao longo de todo o elemento considerado.”

Para garantir o cobrimento mínimo ($c_{\min}$), o projeto e a execução devem considerar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc). As dimensões das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais.

$$c_{\text{nom}} = c_{\min} + \Delta c \quad \text{Eq. 1}$$

Nas obras correntes o valor de Δc deve ser maior ou igual a 10 mm. Esse valor pode ser reduzido para 5 mm quando “houver um controle adequado de qualidade e limites rígidos de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução” das estruturas de concreto, informado nos desenhos de projeto.

A Tabela 3 (NBR 6118, item 7.4.7.2) apresenta valores de cobrimento nominal com tolerância de execução (Δc) de 10 mm, em função da classe de agressividade ambiental.

Tabela 3 – Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para $\Delta c = 10$ mm (Tabela 7.2 da NBR 6118).

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (CAA)			
		I	II	III	IV ²
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto Armado ⁴	Laje ¹	20	25	35	45
	Viga/Pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ³	30		40	50

Notas: 1) “Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros tantos, as exigências desta tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal ≥ 15 mm.”

2) “Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.”

3) “No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal ≥ 45 mm.”

4) Para parâmetros relativos ao Concreto Protendido consultar a Tabela 7.2 da NBR 6118. “No caso de elementos estruturais pré-fabricados, os valores relativos ao cobrimento das armaduras (Tabela 7.2) devem seguir o disposto na ABNT NBR 9062.”² (item 7.4.7.7).

Para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos na Tabela 3 podem ser reduzidos em até 5 mm.

A NBR 6118 (itens 7.4.7.5 e 7.4.7.6) ainda estabelece que o cobrimento nominal de uma determinada barra deve sempre ser:

$$c_{\text{nom}} \geq \phi_{\text{barra}} \quad \text{Eq. 2}$$

$$c_{\text{nom}} \geq \phi_{\text{feixe}} = \phi_n = \phi \sqrt{n}$$

A dimensão máxima característica do agregado graúdo ($d_{\text{máx}}$) utilizado no concreto não pode superar em 20 % a espessura nominal do cobrimento, ou seja:

$$d_{\text{máx}} \leq 1,2 c_{\text{nom}} \quad \text{Eq. 3}$$

² ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. NBR 9062, ABNT, 2001, 36p.

5 CONCEITOS INICIAIS

5.1 Solicitações Normais

Os pilares podem estar submetidos a forças normais e momentos fletores, gerando os seguintes casos de solicitação:

a) Compressão Simples

A compressão simples também é chamada compressão centrada ou compressão uniforme. A aplicação da força normal N_d é no centro geométrico (CG) da seção transversal do pilar, cujas tensões na seção transversal são uniformes (Figura 2).

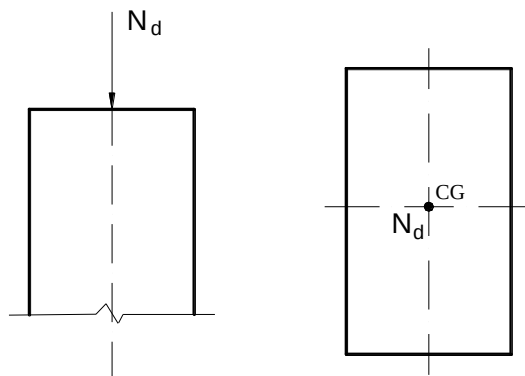


Figura 2 – Solicitação de compressão simples ou uniforme.

b) Flexão Composta

Na flexão composta ocorre a atuação conjunta de força normal e momento fletor sobre o pilar. Há dois casos:

- Flexão Composta Normal (ou Reta): existe a força normal e um momento fletor em uma direção, tal que $M_{dx} = e_{1x} \cdot N_d$ (Figura 3a);

- Flexão Composta Oblíqua: existe a força normal e dois momentos fletores, relativos às duas direções principais do pilar, tal que $M_{1d,x} = e_{1x} \cdot N_d$ e $M_{1d,y} = e_{1y} \cdot N_d$ (Figura 3b).

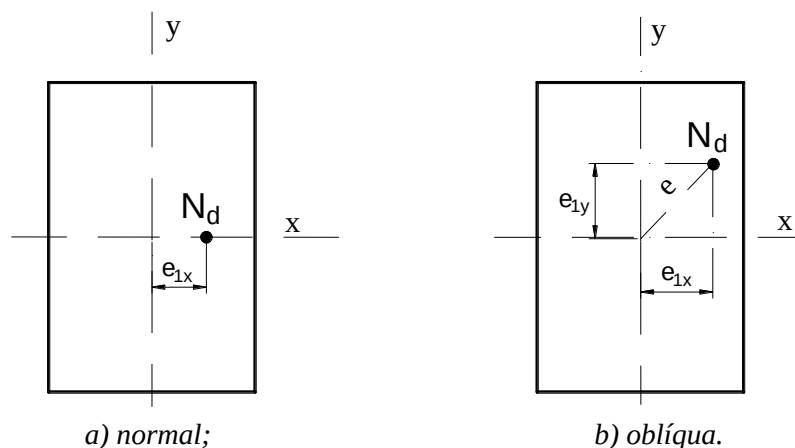


Figura 3 – Tipos de flexão composta.

5.2 Flambagem

Flambagem pode ser definida como o “deslocamento lateral na direção de maior esbeltez, com força menor do que a de ruptura do material” ou como a “instabilidade de peças esbeltas comprimidas”. A

ruína por efeito de flambagem é repentina e violenta, mesmo que não ocorram acréscimos bruscos nas ações aplicadas.

Uma barra comprimida feita por alguns tipos de materiais pode resistir a cargas substancialmente superiores à carga crítica (N_{crit}), o que significa que a flambagem não corresponde a um estado-limite último. No entanto, para uma barra comprimida de Concreto Armado, a flambagem caracteriza um estado-limite último.

5.3 Não-linearidade Física e Geométrica

No dimensionamento de alguns elementos estruturais, especialmente os pilares, é importante considerar duas linearidades que ocorrem, uma relativa ao material concreto e outra relativa à geometria do pilar.

a) não-linearidade física

Quando o material não obedece à Lei de Hooke, como materiais com diagramas $\sigma \times \varepsilon$ mostrados na Figura 4b e Figura 4c. A Figura 4a e a Figura 4d mostram materiais onde há linearidade física.

O concreto simples apresenta comportamento elastoplástico em ensaios de compressão simples, com um trecho inicial linear até aproximadamente $0,3f_c$.

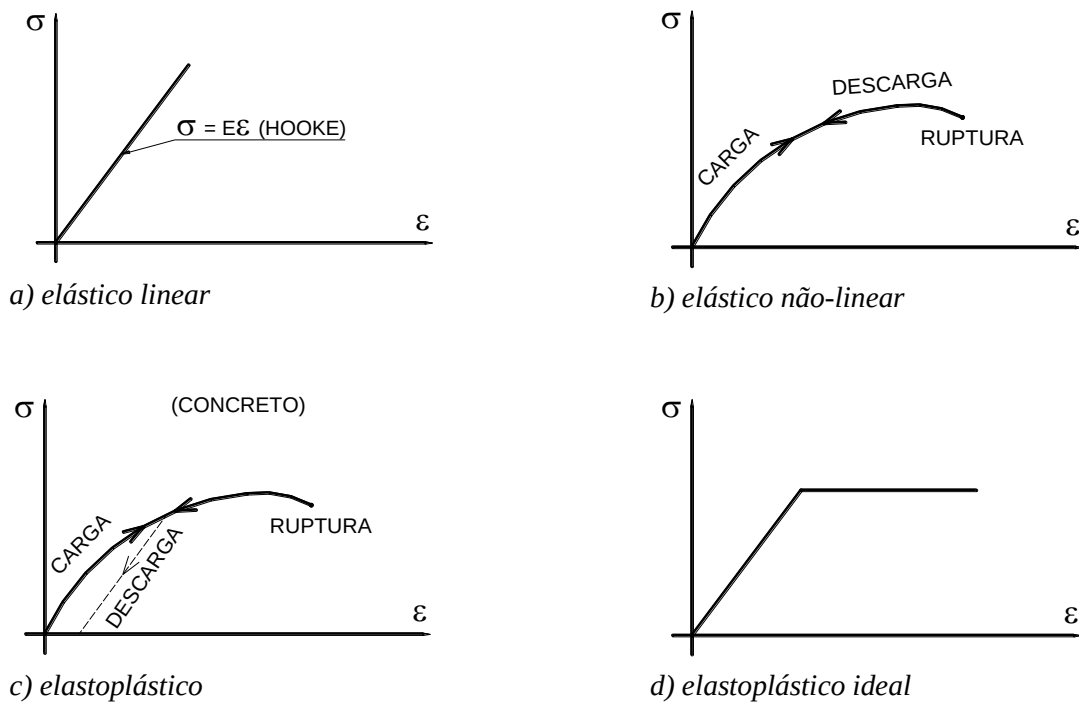


Figura 4 – Diagramas $\sigma \times \varepsilon$ de alguns materiais.

b) não-linearidade geométrica

Ocorre quando as deformações provocam esforços adicionais que precisam ser considerados no cálculo, gerando os chamados esforços de segunda ordem, como o momento fletor $M = F \cdot a$ (Figura 5).

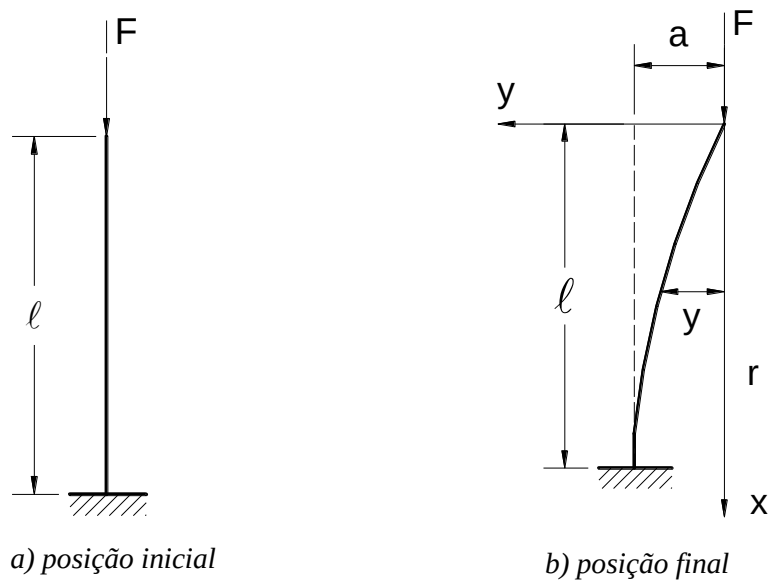


Figura 5 – Não-linearidade geométrica originando esforços de segunda ordem.

5.4 Equação da Curvatura de Elementos Fletidos

O deslocamento local de 2ª ordem é aquele que ocorre em um lance³ do pilar, como os deslocamentos horizontais da barra indicada na Figura 5b. A NBR 6118 comumente usa os termos “efeitos locais de 2ª ordem”, onde, entre outros, o principal efeito é o momento fletor de segunda ordem (M_2), gerado a partir do deslocamento lateral da barra, igual a $F \cdot a$ no caso da barra da Figura 5b.

A determinação dos efeitos locais de 2ª ordem em barras comprimidas pode ser feita por métodos aproximados, entre eles o do pilar-padrão com curvatura aproximada, como preconizado na NBR 6118 (item 15.8.3.3.2). Com o intuito de subsidiar o entendimento do pilar-padrão, apresentado adiante, e da expressão para cálculo do momento fletor de 2ª ordem, apresenta-se agora a equação da curvatura de elementos fletidos.⁴

Considerando a Lei de Hooke ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), a equação da curvatura de peças fletidas, como aquela mostrada na Figura 6, tem a seguinte dedução:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{Eq. 4}$$

Aplicando $\sigma = \frac{M}{I} y$ na Eq. 4 fica:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{M}{E I} y \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta dx}{y} = \frac{M}{E I} dx$$

O comprimento dx pode ser escrito: $dx = r d\phi$

$$d\phi = \frac{dx}{r} = \frac{\Delta dx}{y} = \frac{M}{E I} dx \quad \text{Eq. 5}$$

³ Lance é a parte (comprimento) de um pilar relativa ao trecho entre dois pavimentos de uma edificação.

⁴ A equação da curvatura é geralmente estudada na disciplina Resistência dos Materiais.

Rearranjando os termos da Eq. 5 chega-se a equação da curvatura:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 6}$$

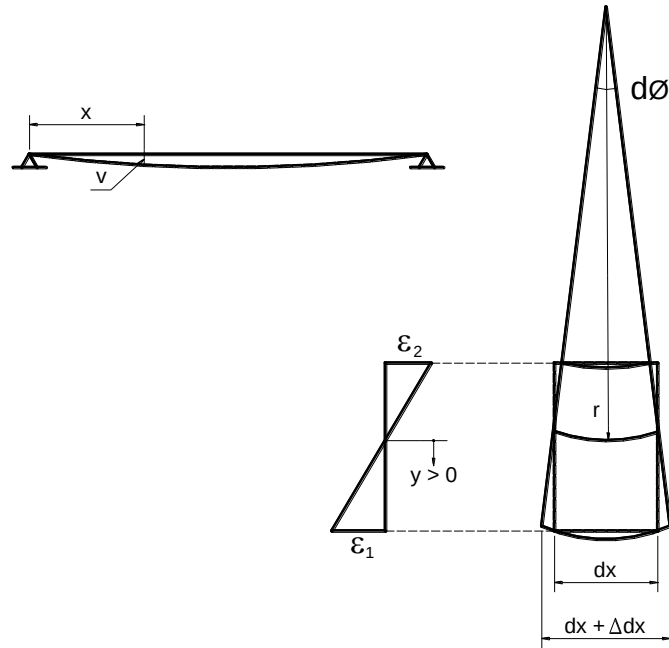


Figura 6 – Curvatura de uma peça fletida.

Do cálculo diferencial tem-se a expressão exata da curvatura (linha elástica):

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad \text{Eq. 7}$$

Para pequenos deslocamentos (pequena inclinação) tem-se $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \ll 1$, o que leva a:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{Eq. 8}$$

Juntando a Eq. 6 e a Eq. 8 encontra-se a equação aproximada para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. 9}$$

A relação existente entre a curvatura e as deformações nos materiais (concreto e aço) da barra, considerando-se a lei de Navier ($\epsilon = y \cdot 1/r$), como mostrado na Figura 7, é:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_1 + |\epsilon_2|}{h} \quad \text{Eq. 10}$$

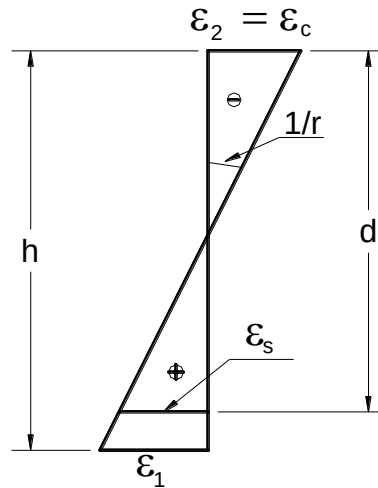


Figura 7 – Relação entre as deformações nos materiais e a curvatura.

Para o Concreto Armado a Eq. 10 torna-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_s + |\varepsilon_c|}{d} \quad \text{Eq. 11}$$

com: ε_s = deformação na armadura tracionada;
 ε_c = deformação no concreto comprimido;
 d = altura útil da peça.

A NBR 6118 aplica esta equação no cálculo do momento fletor de 2ª ordem (M_2), com as deformações ε_s e ε_c substituídas por valores numéricos (ver Eq. 19).

5.5 Compressão Axial

Este item apresenta a dedução da equação simplificada da curvatura de uma barra comprimida (Eq. 16), necessária ao dimensionamento de pilares.

Considere a barra comprimida como mostrada na Figura 8. Como definida na Eq. 8, a equação simplificada da curvatura é:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2 y}{dx^2}$$

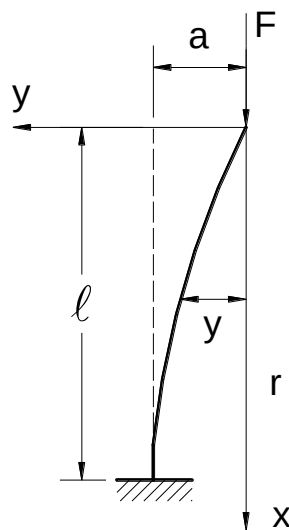


Figura 8 – Curvatura de uma barra comprimida engastada na base e livre no topo.

O momento fletor externo solicitante é $M_{\text{ext}} = F \cdot y$. Considerando a Eq. 9 ($\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$), com material elástico linear, e fazendo o equilíbrio entre o momento fletor externo e o momento fletor interno ($M_{\text{ext}} = M_{\text{int}}$) tem-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI} y = -k^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

com $k^2 = F/EI$.

A solução geral para a equação diferencial tem a forma:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad \text{Eq. 12}$$

As condições de contorno para definição das constantes C_1 e C_2 são:

$$\text{a) para } x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore C_2 = 0$$

A Eq. 12 simplifica-se para:

$$y = C_1 \sin kx \quad \text{Eq. 13}$$

$$\text{b) para } x = \ell \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=\ell} = |k C_1 \cos kx|_{x=\ell} = k C_1 \cos k\ell = 0 \quad \text{Eq. 14}$$

Para barra fletida, a constante C_1 na Eq. 14 deve ser diferente de zero, o que leva a:

$$\cos k\ell = 0 \quad \rightarrow \quad k\ell = \pi/2 \quad \rightarrow \quad k = \pi/2\ell$$

A Eq. 13 toma a forma:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{2\ell} x \quad \text{Eq. 15}$$

Para $x = \ell$, o deslocamento y é igual ao valor a (ver Figura 8). Portanto, aplicando a Eq. 15:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi}{2} = a, \text{ donde resulta que } C_1 = a.$$

Sendo $2\ell = \ell_e$ (ℓ_e = comprimento de flambagem) e com a determinação da constante C_1 , define-se a equação simplificada para a curvatura da barra comprimida:

$$y = a \sin \frac{\pi x}{\ell_e} \quad \text{Eq. 16}$$

5.6 Pilar-Padrão

O pilar-padrão é uma simplificação do chamado “Método Geral”⁵, o qual “*Consiste na análise não linear de 2ª ordem efetuada com discretização adequada da barra, consideração da relação momento-curvatura real em cada seção e consideração da não linearidade geométrica de maneira não aproximada. O método geral é obrigatório para $\lambda > 140$.*” (NBR 6118, 15.8.3.2).

⁵ O Método Geral não é geralmente estudado em profundidade em curso de graduação.

O pilar-padrão é uma barra engastada na base e livre no topo, com uma curvatura conhecida (Figura 9). É importante salientar que o método do pilar-padrão é aplicável somente a pilares de seção transversal constante e armadura constante em todo o comprimento do pilar.

“A verificação da segurança é feita arbitrando-se deformações ε_c e ε_s tais que não ocorra o estado limite último de ruptura ou alongamento plástico excessivo na seção mais solicitada da peça.” (FUSCO, 1981).

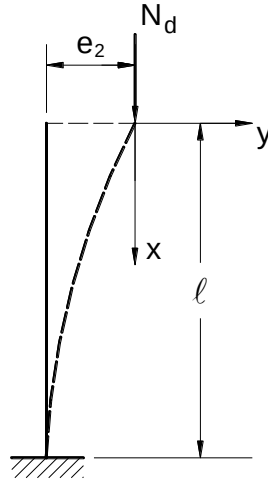


Figura 9 – Pilar-padrão.

Como simplificação a linha elástica pode ser tomada pela função senoidal definida na Eq. 16, onde a é considerada igual a e_2 (deformação de 2ª ordem), conforme mostrado na Figura 9:

$$y = -e_2 \sin \frac{\pi x}{\ell_e}$$

A primeira e a segunda derivada da equação fornecem:

$$\frac{dy}{dx} = -e_2 \frac{\pi}{\ell_e} \cos \frac{\pi x}{\ell_e}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\pi}{\ell_e} \right)^2 e_2 \sin \frac{\pi x}{\ell_e} = \frac{\pi^2}{\ell_e^2} y$$

Considerando a Eq. 8 ($\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2}$), da segunda derivada surge o valor para y em função da curvatura

1/r:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi^2}{\ell_e^2} y = \frac{1}{r} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\ell_e^2}{\pi^2} \frac{1}{r}$$

Tomando y como o máximo deslocamento e_2 tem-se:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{\pi^2} \frac{1}{r}$$

Com $\pi^2 \cong 10$ e sendo $1/r$ relativo à seção crítica (base), o deslocamento no topo da barra é:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{base}}$$

Eq. 17

O deslocamento máximo e_2 é chamado “excentricidade de 2ª ordem” e será considerado no dimensionamento dos pilares, como se verá adiante. Devido à excentricidade local e_2 surge o momento fletor de segunda ordem:

$$M_{2d} = N_d \cdot e_2 = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \left(\frac{1}{r} \right)_{\text{base}} \quad \text{Eq. 18}$$

Tomando a Eq. 11, o aço CA-50, $\gamma_s = 1,15$ e $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰} = 0,0035$, pode-se determinar o valor da curvatura $1/r$ na base (seção crítica) do pilar-padrão:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_s + |\varepsilon_c|}{d} = \frac{\frac{f_{yd}}{E_s} + 0,0035}{d} = \frac{\frac{50/1,15}{21000} + 0,0035}{d} = \frac{0,00207 + 0,0035}{d} = \frac{0,00557}{d}$$

A NBR 6118 (item 15.8.3.3.2) toma uma expressão aproximada para a curvatura na base, como:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad \text{Eq. 19}$$

com v (ni) sendo um valor adimensional relativo à força normal (N_d):

$$v = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad \text{Eq. 20}$$

onde: h = altura da seção na direção considerada;

A_c = área da seção transversal;

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{ck}/γ_c).

Aplicando a Eq. 19 na Eq. 18 tem-se o máximo momento fletor de segunda ordem local, a ser aplicado no dimensionamento de pilares pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada:

$$M_{2d} = N_d \frac{\ell_e^2}{10} \left[\frac{0,005}{h(v + 0,5)} \right] \quad \text{Eq. 21}$$

6 NOÇÕES DE CONTRAVENTAMENTO DE ESTRUTURAS

Os edifícios devem ser projetados de modo a apresentarem a necessária estabilidade às ações verticais e horizontais, ou seja, devem apresentar a chamada “estabilidade global”. Os pilares são os elementos destinados à estabilidade vertical, porém, é necessário projetar outros elementos mais rígidos que, além de também transmitirem as ações verticais, deverão garantir a estabilidade horizontal do edifício à ação do vento e de sismos (quando existirem). Ao mesmo tempo, são esses elementos mais rígidos que garantirão a indeslocabilidade dos nós dos pilares menos rígidos.

Com essas premissas classificam-se os elementos verticais dos edifícios em elementos de contraventamento e elementos (pilares) contraventados.

Define-se o sistema de contraventamento como “o conjunto de elementos que proporcionarão a estabilidade horizontal do edifício e a indeslocabilidade ou quase- indeslocabilidade dos pilares contraventados”, que são aqueles que não fazem parte do sistema de contraventamento. A NBR 6118 (item 15.4.3) diz que, “*Por conveniência de análise, é possível identificar, dentro da estrutura, subestruturas que, devido à sua grande rigidez a ações horizontais, resistem à maior parte dos esforços decorrentes dessas ações. Essas subestruturas são chamadas subestruturas de contraventamento. Os elementos que não participam da subestrutura de contraventamento são chamados elementos contraventados.*”

Os elementos de contraventamento são constituídos por pilares de grandes dimensões (pilares-parede ou simplesmente paredes estruturais), por treliças ou pórticos de grande rigidez, núcleos de rigidez, etc., como mostrados na Figura 10.

As lajes dos diversos pavimentos do edifício também podem participar da estabilidade horizontal, ao atuarem como elementos de rigidez infinita no próprio plano (o que se chama diafragma rígido), fazendo a ligação entre elementos de contraventamento formados por pórticos, por exemplo.

Segundo SÜSSEKIND (1984, p. 175), “Toda estrutura, independentemente do número de andares e das dimensões em planta, deve ter seu sistema de contraventamento estudado e adequadamente dimensionado.”

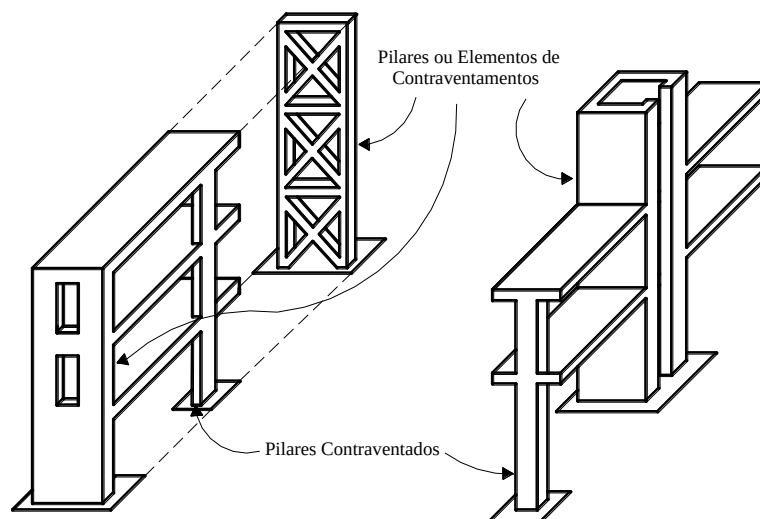


Figura 10 – Pilares contraventados e elementos de contraventamento (FUSCO, 1981).

6.1 Estruturas de Nós Fixos e Móveis

No item 15.4.2 a NBR 6118 define o que são, para efeito de cálculo, estruturas de nós fixos e de nós móveis. A Figura 12 e a Figura 13 ilustram os tipos.

a) Estruturas de nós fixos

São aquelas “quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos e, por decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são desprezíveis (inferiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas, basta considerar os efeitos locais e localizados de 2ª ordem.”

No item 15.4.1 a NBR 6118 apresenta definições de efeitos globais, locais e localizados de 2ª ordem: “Sob a ação das cargas verticais e horizontais, os nós da estrutura deslocam-se horizontalmente. Os esforços de 2ª ordem decorrentes desses deslocamentos são chamados efeitos globais de 2ª ordem. Nas barras da estrutura, como um lance de pilar, os respectivos eixos não se mantêm retilíneos, surgindo aí efeitos locais de 2ª ordem que, em princípio, afetam principalmente os esforços solicitantes ao longo delas.

Em pilares-parede (simples ou compostos) pode-se ter uma região que apresenta não retilinearidade maior do que a do eixo do pilar como um todo. Nessas regiões surgem efeitos de 2ª ordem maiores, chamados de efeitos de 2ª ordem localizados (ver Figura 15.3). O efeito de 2ª ordem localizado, além de aumentar nessa região a flexão longitudinal, aumenta também a flexão transversal, havendo a necessidade de aumentar a armadura transversal nessas regiões.” (ver Figura 11).

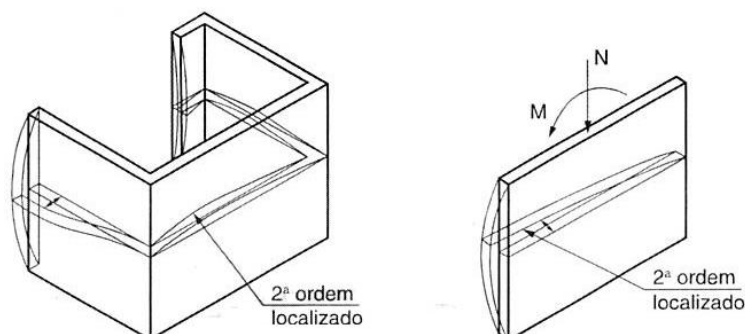


Figura 11 – Efeitos de 2ª ordem localizados (NBR 6118).

b) Estruturas de nós móveis

São “aquelas onde os deslocamentos horizontais não são pequenos e, em decorrência, os efeitos globais de 2ª ordem são importantes (superiores a 10 % dos respectivos esforços de 1ª ordem). Nessas estruturas devem ser considerados tanto os esforços de 2ª ordem globais como os locais e localizados.”

As subestruturas de contraventamento podem ser de nós fixos ou de nós móveis, de acordo com as definições acima (Figura 12).

Para verificar se a estrutura está sujeita ou não a esforços globais de 2ª ordem, ou seja, se a estrutura pode ser considerada como de nós fixos, lança-se mão do cálculo do parâmetro de instabilidade α (NBR 6118, item 15.5.2) ou do coeficiente γ_z (item 15.5.3). Esses coeficientes serão estudados na disciplina Estruturas de Concreto IV.

Para mais informações sobre a estabilidade global dos edifícios devem ser consultados FUSCO (2000) e SÜSSEKIND (1984).

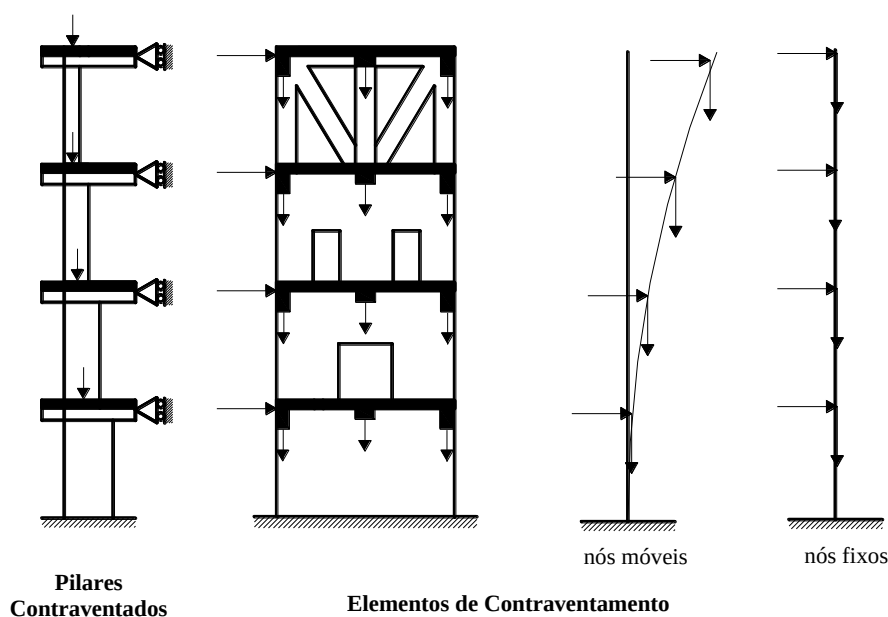


Figura 12 – Pilares contraventados e elementos de contraventamento (FUSCO, 1981).

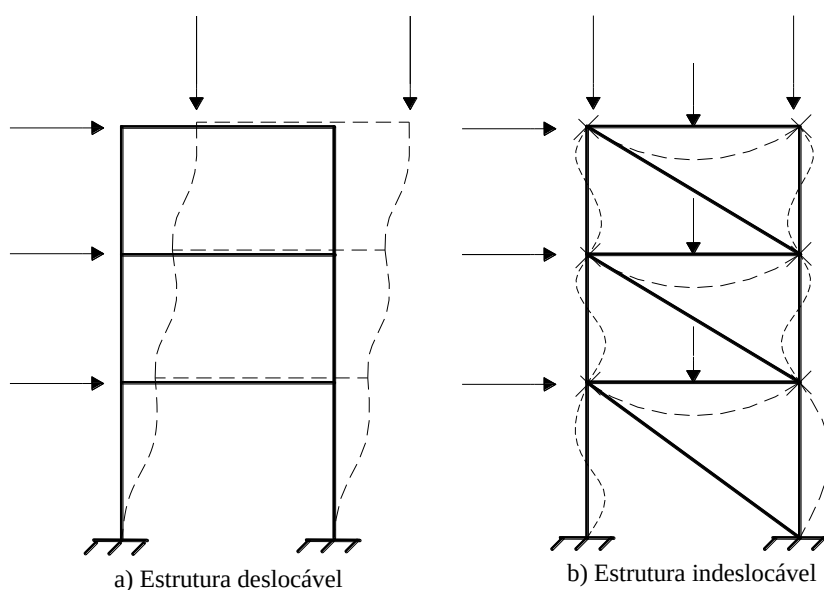


Figura 13 – Estruturas de nós fixos e móveis (FUSCO, 1981).

6.2 Elementos Isolados

A NBR 6118 (item 15.4.4) define que são “considerados elementos isolados os seguintes:

- a) elementos estruturais isostáticos;
- b) elementos contraventados;
- c) elementos que fazem parte de estruturas de contraventamento de nós fixos;
- d) elementos das subestruturas de contraventamento de nós móveis, desde que, aos esforços nas extremidades, obtidos em uma análise de 1ª ordem, sejam acrescentados os determinados por análise global de 2ª ordem.”

Nesta apostila são apresentados somente os chamados elementos (pilares) contraventados.

7 EXCENTRICIDADES

Neste item são apresentadas outras excentricidades além da excentricidade de 2ª ordem, que podem ocorrer no dimensionamento dos pilares: excentricidade de 1ª ordem, excentricidade acidental e excentricidade devida à fluência.

7.1 Excentricidade de 1ª Ordem

A excentricidade de 1ª ordem (e_1) é devida à possibilidade de ocorrência de momentos fletores externos solicitantes, que podem ocorrer ao longo do comprimento do pilar, ou devido ao ponto teórico de aplicação da força normal não estar localizado no centro de gravidade da seção transversal, ou seja, existência da excentricidade inicial a , como indicada na Figura 14.

Considerando a força normal N e o momento fletor M (independente de N), a Figura 14 mostra os casos possíveis de excentricidade de 1ª ordem.

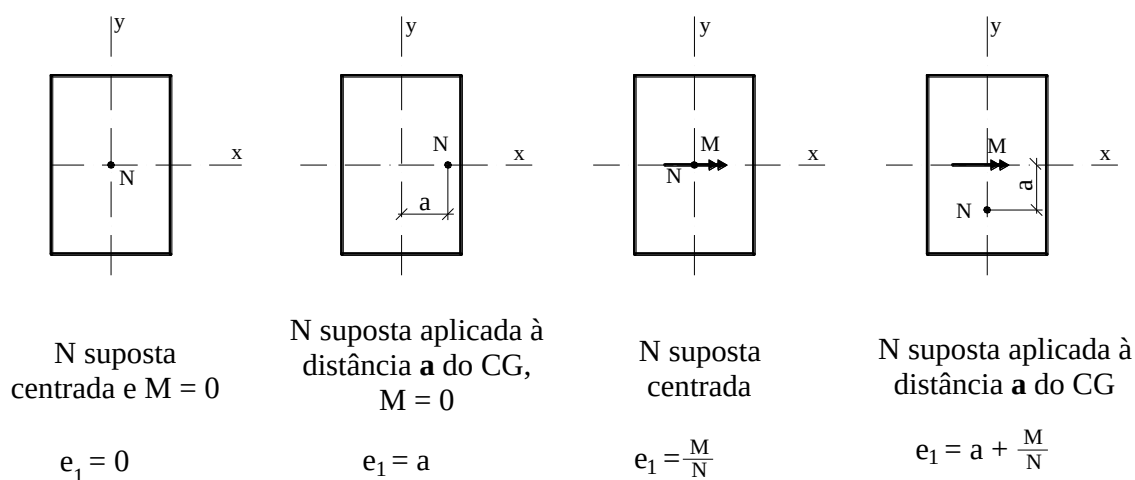


Figura 14 – Casos de excentricidade de 1ª ordem.

7.2 Excentricidade Acidental

“No caso do dimensionamento ou verificação de um lance de pilar, dever ser considerado o efeito do desaprumo ou da falta de retinidade do eixo do pilar [...]. Admite-se que, nos casos usuais de estruturas reticuladas, a consideração apenas da falta de retinidade ao longo do lance de pilar seja suficiente.” (NBR 6118, 11.3.3.4.2). A imperfeição geométrica pode ser avaliada pelo ângulo θ_1 :

$$\theta_1 = \frac{1}{100\sqrt{H}} \quad \text{Eq. 22}$$

com: H = altura do lance, em metro, conforme mostrado na Figura 15;

$\theta_{1\min} = 1/300$ para estruturas reticuladas e imperfeições locais;

$\theta_{1\max} = 1/200$

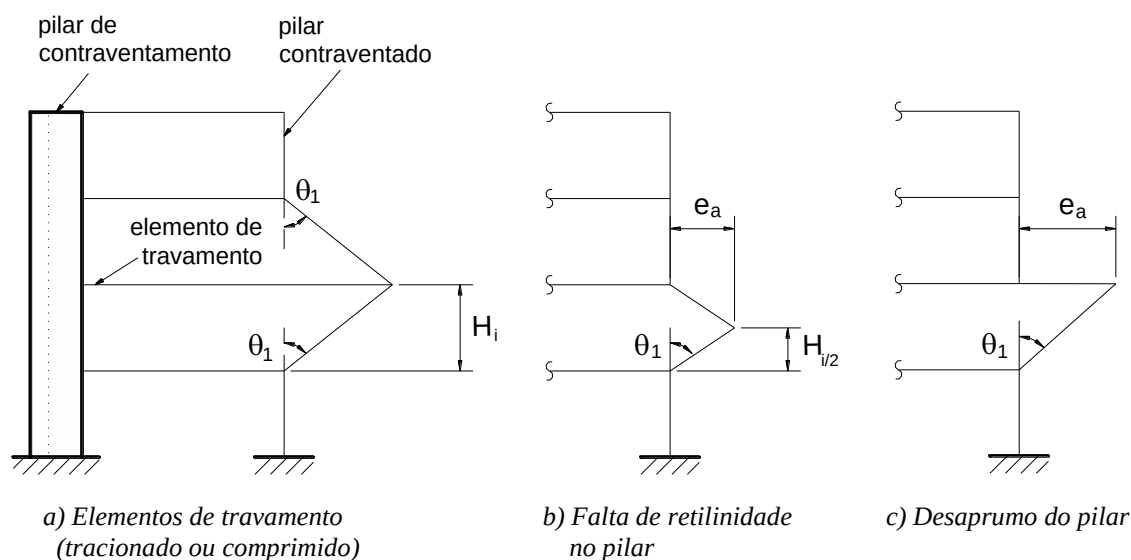


Figura 15 – Imperfeições geométricas locais.

A excentricidade acidental para um lance do pilar resulta do ângulo θ_1 :

$$e_a = \theta_1 \frac{H}{2} \quad \text{Eq. 23}$$

7.3 Excentricidade de 2ª Ordem

“A análise global de 2ª ordem fornece apenas os esforços nas extremidades das barras, devendo ser realizada uma análise dos efeitos locais de 2ª ordem ao longo dos eixos das barras comprimidas, de acordo com o prescrito em 15.8. Os elementos isolados, para fins de verificação local, devem ser formados pelas barras comprimidas retiradas da estrutura, com comprimento ℓ_e , de acordo com o estabelecido em 15.6, porém aplicando-se às suas extremidades os esforços obtidos através da análise global de 2ª ordem.” (NBR 6118, item 15.7.4).

Conforme a NBR 6118 (15.8.2), “Os esforços locais de 2ª ordem em elementos isolados podem ser desprezados quando o índice de esbeltez for menor que o valor-limite λ_1 [...]. O valor de λ_1 depende de diversos fatores, mas os preponderantes são:

- a excentricidade relativa de 1ª ordem e_1/h na extremidade do pilar onde ocorre o momento de 1ª ordem de maior valor absoluto;
- a vinculação dos extremos da coluna isolada;
- a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.”

O valor-limite λ_1 é:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad \text{Eq. 24}$$

com: $35 \leq \lambda_1 \leq 90$,

onde: e_1 = excentricidade de 1ª ordem (não inclui a excentricidade acidental e_a);

e_1/h = excentricidade relativa de 1ª ordem.

No item 15.8.1 da NBR 6118 encontra-se que o pilar deve ser do tipo isolado, e de seção e armadura constantes ao longo do eixo longitudinal, submetidos à flexo-compressão. “Os pilares devem ter índice de esbeltez menor ou igual a 200 ($\lambda \leq 200$). Apenas no caso de elementos pouco comprimidos com força normal menor que $0,10f_{cd} A_c$, o índice de esbeltez pode ser maior que 200. Para pilares com índice

de esbelteza superior a 140, na análise dos efeitos locais de 2ª ordem, devem-se multiplicar os esforços solicitantes finais de cálculo por um coeficiente adicional $\gamma_{n1} = 1 + [0,01(\lambda - 140)/1,4]$.”

O valor de α_b deve ser obtido conforme estabelecido a seguir (NBR 6118, 15.8.2):

“a) para pilares biapoiados sem cargas transversais:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} \geq 0,4 \quad \text{Eq. 25}$$

sendo: $0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$

M_A e M_B são os momentos de 1ª ordem nos extremos do pilar, obtidos na análise de 1ª ordem no caso de estruturas de nós fixos e os momentos totais (1ª ordem + 2ª ordem global) no caso de estruturas de nós móveis. Deve ser adotado para M_A o maior valor absoluto ao longo do pilar biapoiado e para M_B o sinal positivo, se tracionar a mesma face que M_A , e negativo, em caso contrário.

b) para pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura:

$$\alpha_b = 1$$

c) para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,8 + 0,2 \frac{M_C}{M_A} \geq 0,85 \quad \text{Eq. 26}$$

sendo: $0,85 \leq \alpha_b \leq 1,0$,

M_A = momento de 1ª ordem no engaste;

M_C = momento de 1ª ordem no meio do pilar em balanço.

d) para pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo estabelecido em 11.3.3.4.3:

$$\alpha_b = 1$$

O fator α_b consta do ACI 318 (1995) com a notação C_m (item 10.12.3.1). Porém, ao contrário da NBR 6118, que também considera a excentricidade relativa e_i/h , tanto o ACI como o Eurocode 2 (1992) e o MC-90 (1990) do CEB, calculam a esbelteza limite em função da razão entre os momentos flettores ou entre as excentricidades nas extremidades do pilar.

7.4 Excentricidade Devida à Fluência

“A consideração da fluência deve obrigatoriamente ser realizada em pilares com índice de esbelteza $\lambda > 90$ e pode ser efetuada de maneira aproximada, considerando a excentricidade adicional e_{cc} dada a seguir:” (NBR 6118, 15.8.4)

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \left(2,718^{\frac{\phi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad \text{Eq. 27}$$

$$N_e = \frac{10 E_{ci} I_c}{\ell_e^2} \quad \text{Eq. 28}$$

onde: e_a = excentricidade devida a imperfeições locais;

M_{sg} e N_{sg} = esforços solicitantes devidos à combinação quase permanente;
 ϕ = coeficiente de fluência;
 E_{ci} = módulo de elasticidade tangente;
 I_c = momento de inércia;
 ℓ_e = comprimento de flambagem.

8 ÍNDICE DE ESBELTEZ

O índice de esbeltez é a razão entre o comprimento de flambagem e o raio de giração, nas direções a serem consideradas (NBR 6118, 15.8.2):

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \quad \text{Eq. 29}$$

com o raio de giração sendo: $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

Para seção retangular o índice de esbeltez é:

$$\lambda = \frac{3,46 \ell_e}{h} \quad \text{Eq. 30}$$

onde: ℓ_e = comprimento de flambagem;
 i = raio de giração da seção geométrica da peça (seção transversal de concreto, não se considerando a presença de armadura);
 I = momento de inércia;
 A = área da seção;
 h = dimensão do pilar na direção considerada.

O comprimento de flambagem de uma barra isolada depende das vinculações na base e no topo, conforme os esquemas mostrados na Figura 16.

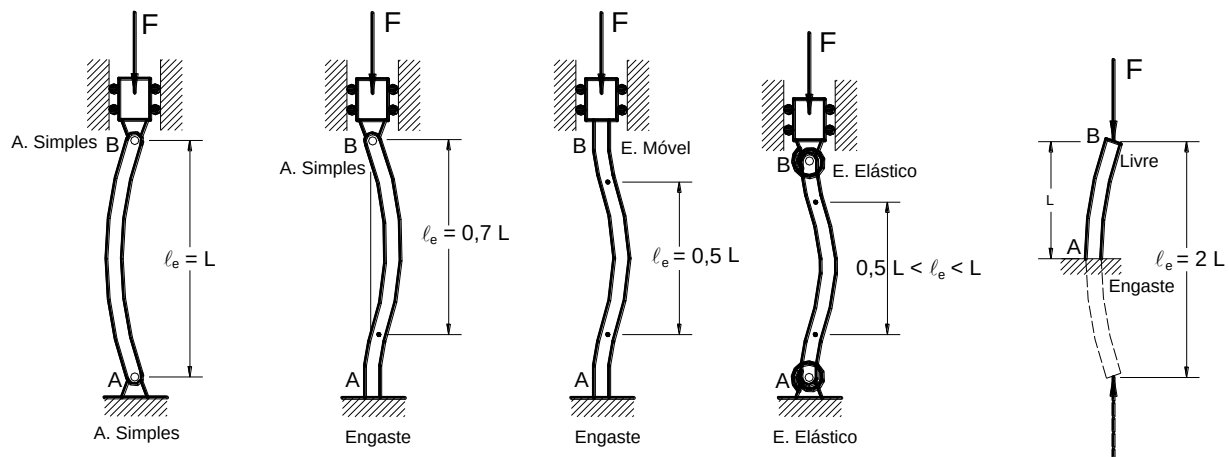


Figura 16 – Comprimento de flambagem.

Em edifícios, a linha deformada dos pilares contraventados apresenta-se como mostrada na Figura 17a. Uma simplificação pode ser feita como indicada na Figura 17b.

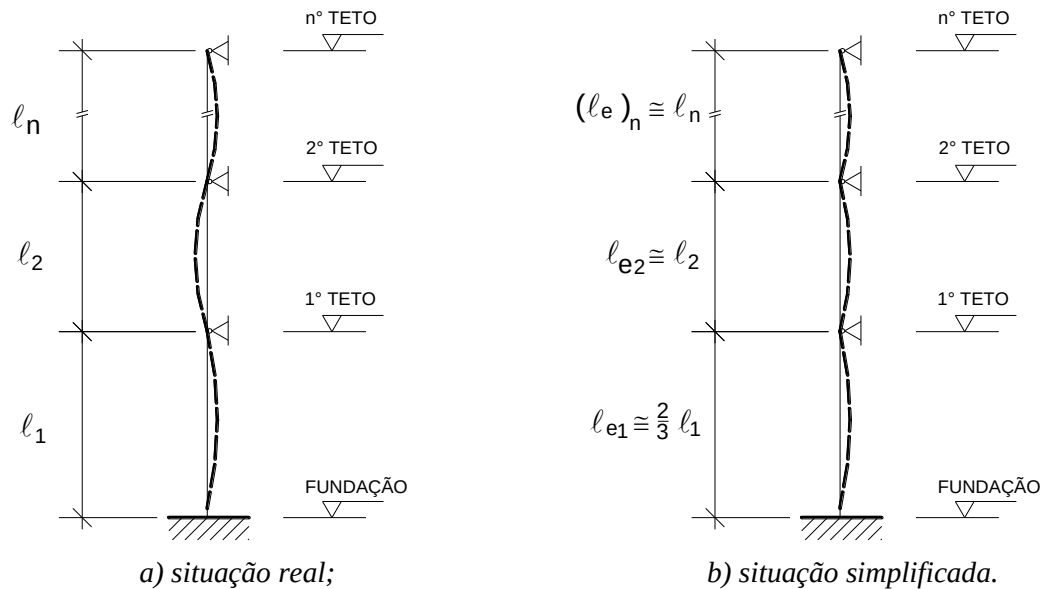


Figura 17 – Situação real e simplificada de pilares contraventados de edifícios (SÜSSEKIND, 1984).

“Nas estruturas de nós fixos, o cálculo pode ser realizado considerando cada elemento comprimido isoladamente, como barra vinculada nas extremidades aos demais elementos estruturais que ali concorrem, onde se aplicam os esforços obtidos pela análise da estrutura efetuada segundo a teoria de 1ª ordem.” (NBR 6118, 15.6).

Assim, o comprimento equivalente (ℓ_e), de flambagem, “do elemento comprimido (pilar), suposto vinculado em ambas as extremidades, deve ser o menor dos seguintes valores:

$$\ell_e \leq \begin{cases} \ell_o + h \\ \ell \end{cases} \quad \text{Eq. 31}$$

com: ℓ_o = distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar (Figura 18);

h = altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura em estudo;

ℓ = distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.”

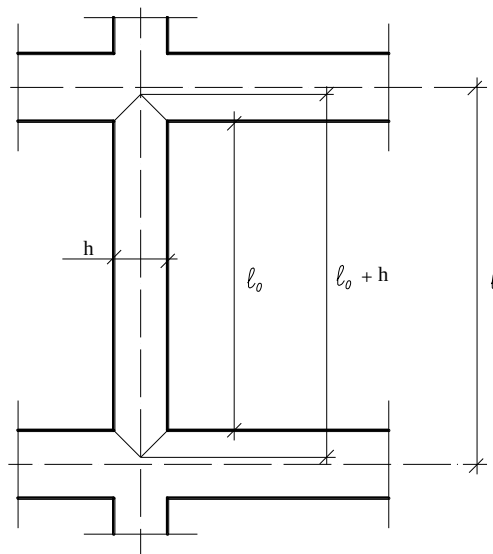


Figura 18 – Valores de ℓ_o e ℓ .

Para casos de determinação do comprimento de flambagem mais complexos recomenda-se a leitura de SÜSSEKIND (1984, v.2).

Em função do índice de esbeltez, os pilares podem ser classificados como:

- a) Pilar curto se $\lambda \leq 35$;
- b) Pilar médio se $35 < \lambda \leq 90$;
- c) Pilar medianamente esbelto se $90 < \lambda \leq 140$;
- d) Pilar esbelto se $140 < \lambda \leq 200$.

Eq. 32

Os pilares curtos e médios representam a grande maioria dos pilares das edificações. Os pilares medianamente esbeltos e esbeltos são bem menos frequentes.

9 DETERMINAÇÃO DOS EFEITOS LOCAIS DE 2ª ORDEM

De acordo com a NBR 6118 (15.8.3), o cálculo dos efeitos locais de 2ª ordem pode ser feito pelo Método Geral ou por métodos aproximados. O Método Geral é obrigatório para elementos com $\lambda > 140$.

A norma apresenta diferentes métodos aproximados, sendo eles: *método do pilar-padrão com curvatura aproximada* (item 15.8.3.3.2), *método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada* (15.8.3.3.3), *método do pilar-padrão acoplado a diagramas M, N, $1/r$* (15.8.3.3.4) e *método do pilar-padrão para pilares de seção retangular submetidos à flexão composta oblíqua* (15.8.3.3.5). Serão agora apresentados os métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e com rigidez aproximada, que são simples de serem aplicados no dimensionamento. O pilar-padrão foi apresentado no item 5.6.

9.1 Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada

Conforme a NBR 6118 (15.8.3.3.2), o método pode ser “*empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física é considerada através de uma expressão aproximada da curvatura na seção crítica.*”

A equação senoidal para a linha elástica foi definida na Eq. 16, que define os valores para a deformação de 2ª ordem (e_2) ao longo da altura do pilar. A não linearidade física com a curvatura aproximada foi apresentada na Eq. 11 e na Eq. 19.

O momento fletor total máximo no pilar deve ser calculado com a expressão:

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad \text{Eq. 33}$$

onde: α_b = parâmetro definido no item 7.3;

N_d = força normal solicitante de cálculo;

ℓ_e = comprimento de flambagem.

$1/r$ = curvatura na seção crítica, avaliada pela expressão aproximada (Eq. 19):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

A força normal adimensional (v) foi definida na Eq. 20:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

Embora o item 15.8.3.3.2 da versão de 2014 da NBR 6118, diferentemente da versão de 2003, não apresente diretamente, deve-se considerar que:

$$\begin{aligned} M_{1d,A} &\geq M_{1d,\min} \\ M_{d,tot} &\geq M_{1d,\min} \end{aligned}$$

com: $M_{1d,A}$ = valor de cálculo de 1ª ordem do momento M_A , como definido no item 7.3;
 $M_{1d,min}$ = momento fletor mínimo como definido a seguir;
 A_c = área da seção transversal do pilar;
 f_{cd} = resistência de cálculo à compressão do concreto ($f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$);
 h = dimensão da seção transversal na direção considerada.

Na versão de 2003, a NBR 6118 introduziu um parâmetro novo no cálculo dos pilares: o momento fletor mínimo, o qual consta no código ACI 318 (1995) como equação 10-15 e: “a esbeltez é levada em consideração aumentando-se os momentos fletores nos extremos do pilar. Se os momentos atuantes no pilar são muito pequenos ou zero, o projeto de pilares esbeltos deve se basear sobre uma excentricidade mínima”, dada pelo momento mínimo.

Na versão de 2014 da NBR 6118 (11.3.3.4.3), como na versão de 2003, consta que o “efeito das imperfeições locais nos pilares e pilares-parede pode ser substituído, em estruturas reticuladas, pela consideração do momento mínimo de 1ª ordem dado a seguir” (item 11.3.3.4.3):

$$M_{1d,min} = N_d (0,015 + 0,03 h) \quad \text{Eq. 34}$$

com h sendo a altura total da seção transversal na direção considerada, em metro (m).

A NBR 6118 ainda informa que ao se considerar o momento fletor mínimo pode-se desconsiderar a excentricidade accidental ou o efeito das imperfeições locais, e que ao momento mínimo devem ser acrescidos os momentos de 2ª ordem.

A rigor, o momento fletor total máximo deve ser calculado para cada direção principal do pilar. Ele leva em conta que, numa seção intermediária onde ocorre a excentricidade máxima de 2ª ordem, o momento fletor máximo de 1ª ordem seja corrigido pelo fator α_b . Isto é semelhante ao que se encontra no item 7.5.4 de FUSCO (1981), com a diferença de que novos parâmetros foram estabelecidos para α_b . Se o momento fletor de 1ª ordem for nulo ou menor que o mínimo, então o momento fletor mínimo, constante na altura do pilar, deve ser somado ao momento fletor de 2ª ordem.

Ainda no item 11.3.3.4.3 da NBR 6118: “Para pilares de seção retangular, pode-se definir uma envoltória mínima de 1ª ordem, tomada a favor da segurança,” conforme mostrado na Figura 19.

$$\left(\frac{M_{1d,min,x}}{M_{1d,min,xx}} \right)^2 + \left(\frac{M_{1d,min,y}}{M_{1d,min,yy}} \right)^2 = 1 \quad \text{Eq. 35}$$

$$M_{1d,min,xx} = N_d (0,015 + 0,03h)$$

$$M_{1d,min,yy} = N_d (0,015 + 0,03b)$$

sendo: $M_{1d,min,xx}$ e $M_{1d,min,yy}$ = componentes em flexão composta normal;

$M_{1d,min,x}$ e $M_{1d,min,y}$ = componentes em flexão composta oblíqua.

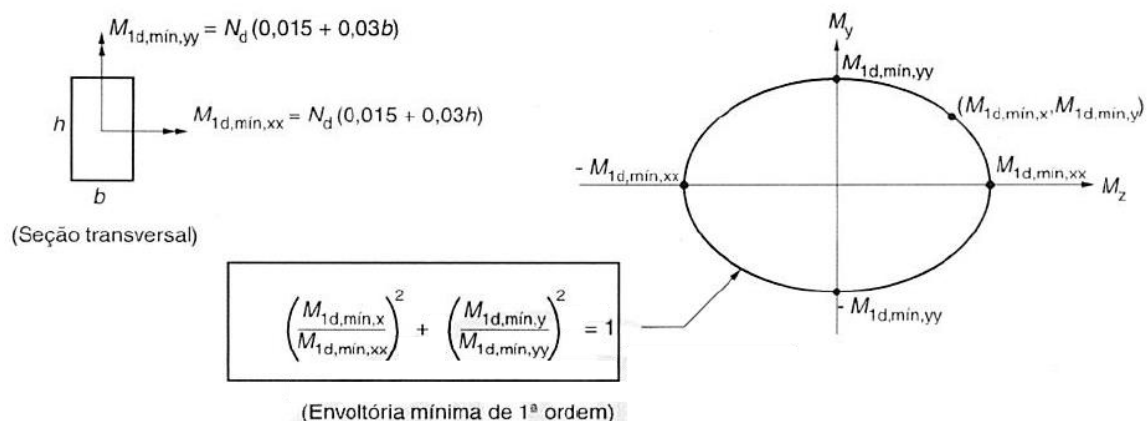


Figura 19 – Envoltória mínima de 1ª ordem (NBR 6118).

“Neste caso, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima de 1ª ordem. Quando houver a necessidade de calcular os efeitos locais de 2ª ordem em alguma das direções do pilar, a verificação do momento mínimo deve considerar ainda a envoltória mínima com 2ª ordem, conforme 15.3.2.”

No item 15.3.2 a norma reapresenta o diagrama da Figura 19, mas com a envoltória mínima acrescida dos efeitos da 2ª ordem, e mostrando também a envoltória resistente (Figura 20). “Para pilares de seção retangular, quando houver a necessidade de calcular os efeitos locais de 2ª ordem, a verificação do momento mínimo pode ser considerada atendida quando, no dimensionamento adotado, obtém-se uma envoltória resistente que englobe a envoltória mínima com 2ª ordem, cujos momentos totais são calculados a partir dos momentos mínimos de 1ª ordem e de acordo com item 15.8.3. A consideração desta envoltória mínima pode ser realizada através de duas análises à flexão composta normal, calculadas de forma isolada e com momentos fletores mínimos de 1ª ordem atuantes nos extremos do pilar, nas suas direções principais.”

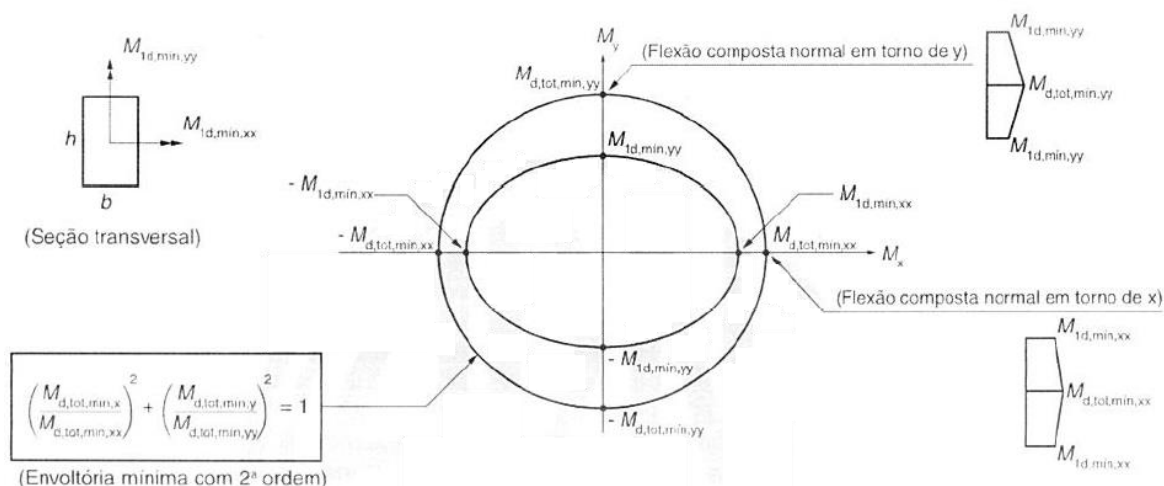


Figura 20 – Envoltória mínima com 2ª ordem (NBR 6118).

9.2 Método do Pilar-Padrão com Rigidez κ Aproximada

Conforme a NBR 6118 (15.8.3.3.3), o método pode ser “empregado apenas no cálculo de pilares com $\lambda \leq 90$, com seção retangular constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo. A não linearidade geométrica deve ser considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformação da barra seja senoidal. A não linearidade física deve ser considerada através de uma expressão aproximada da rigidez.

O momento total máximo no pilar deve ser calculado a partir da majoração do momento de 1ª ordem pela expressão: ”

$$M_{Sd,tot} = \frac{\alpha_b M_{1d,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \kappa / v}} \geq M_{1d,A} \quad \text{Eq. 36}$$

sendo o valor da rigidez adimensional κ dado aproximadamente pela expressão:

$$\kappa_{aprox} = 32 \left(1 + 5 \frac{M_{Rd,tot}}{h \cdot N_d} \right) v \quad \text{Eq. 37}$$

“Em um processo de dimensionamento, toma-se $M_{Rd,tot} = M_{Sd,tot}$. Em um processo de verificação, onde a armadura é conhecida, $M_{Rd,tot}$ é o momento resistente calculado com essa armadura e com $N_d = N_{Sd} = N_{Rd}$.

As variáveis h , v , $M_{1d,A}$ e α_b são as mesmas definidas anteriormente. A variável λ representa o índice de esbeltez e v o coeficiente adimensional relativo à força normal (Eq. 20).

Substituindo a Eq. 37 na Eq. 36 obtém-se uma equação do 2º grau útil para calcular diretamente o valor de $M_{Sd,tot}$, sem a necessidade de se fazer iterações:

$$a M_{Sd,tot}^2 + b M_{Sd,tot} + c = 0 \quad \text{Eq. 38}$$

$$\begin{cases} a = 5h \\ b = h^2 N_d - \frac{N_d \ell_e^2}{320} - 5h \alpha_b M_{1d,A} \\ c = -N_d h^2 \alpha_b M_{1d,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 39}$$

$$M_{Sd,tot} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Eq. 40}$$

O cálculo do momento fletor total pode ser feito aplicando as três equações acima (Eq. 38, Eq. 39 e Eq. 40), ou também com a equação do segundo grau (com $M_{d,tot}$ ao invés de M_{Sd}):

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0 \quad \text{Eq. 41}$$

10 SITUAÇÕES BÁSICAS DE PROJETO

Para efeito de projeto, os pilares dos edifícios podem ser classificados nos seguintes tipos: pilares intermediários, pilares de extremidade e pilares de canto. A cada um desses tipos básicos corresponde uma situação de projeto diferente.

10.1 Pilar Intermediário

Nos pilares intermediários (Figura 21) considera-se a compressão centrada na situação de projeto, pois como as lajes e vigas são contínuas sobre o pilar, pode-se admitir que os momentos fletores transmitidos ao pilar sejam pequenos e desprezíveis. Não existem, portanto, os momentos fletores M_A e M_B de 1ª ordem nas extremidades do pilar, como descritos no item 7.3.

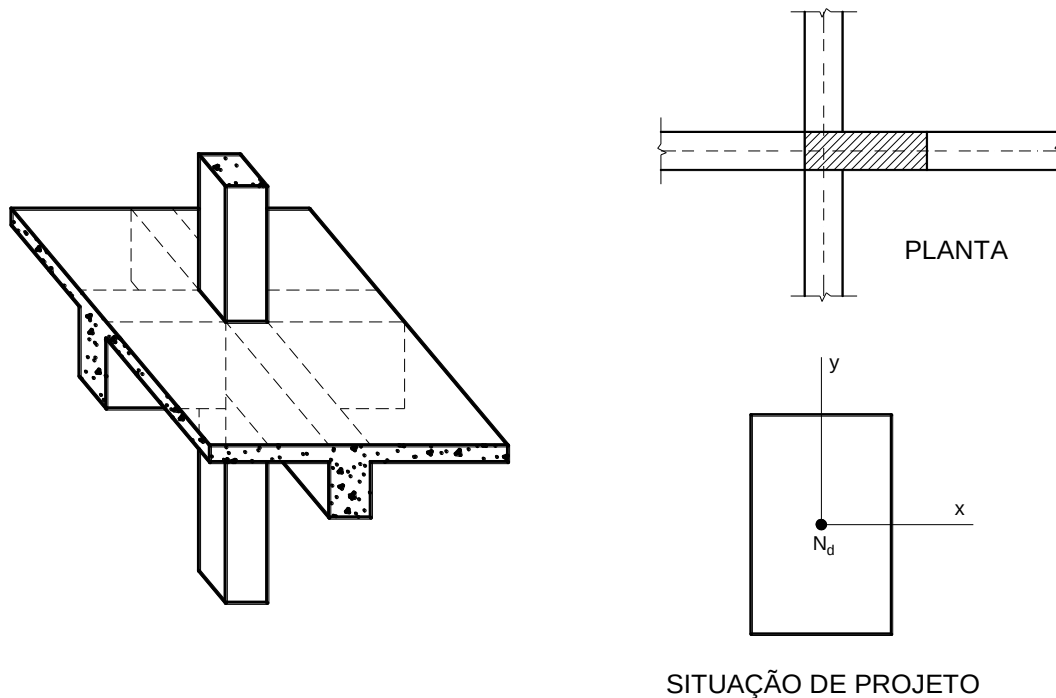


Figura 21 – Arranjo estrutural e situação de projeto dos pilares intermediários.

10.2 Pilar de Extremidade

Os pilares de extremidade, de modo geral, encontram-se posicionados nas bordas das edificações, sendo também chamados pilares laterais ou de borda. O termo “pilar de extremidade” advém do fato do pilar ser extremo para uma viga, aquela que não tem continuidade sobre o pilar, como mostrado na Figura 22. Na situação de projeto ocorre a flexão composta normal, decorrente da não continuidade da viga. Existem, portanto, os momentos fletores M_A e M_B de 1ª ordem em uma direção do pilar, como descritos no item 7.3.

O pilar de extremidade não ocorre necessariamente na borda da edificação, ou seja, pode ocorrer na zona interior de uma edificação, desde que uma viga não apresente continuidade no pilar.

Nas seções de topo e base ocorrem excentricidades e_1 de 1ª ordem, na direção principal x ou y do pilar:

$$e_{1,A} = \frac{M_A}{N_d} \quad \text{e} \quad e_{1,B} = \frac{M_B}{N_d} \quad \text{Eq. 42}$$

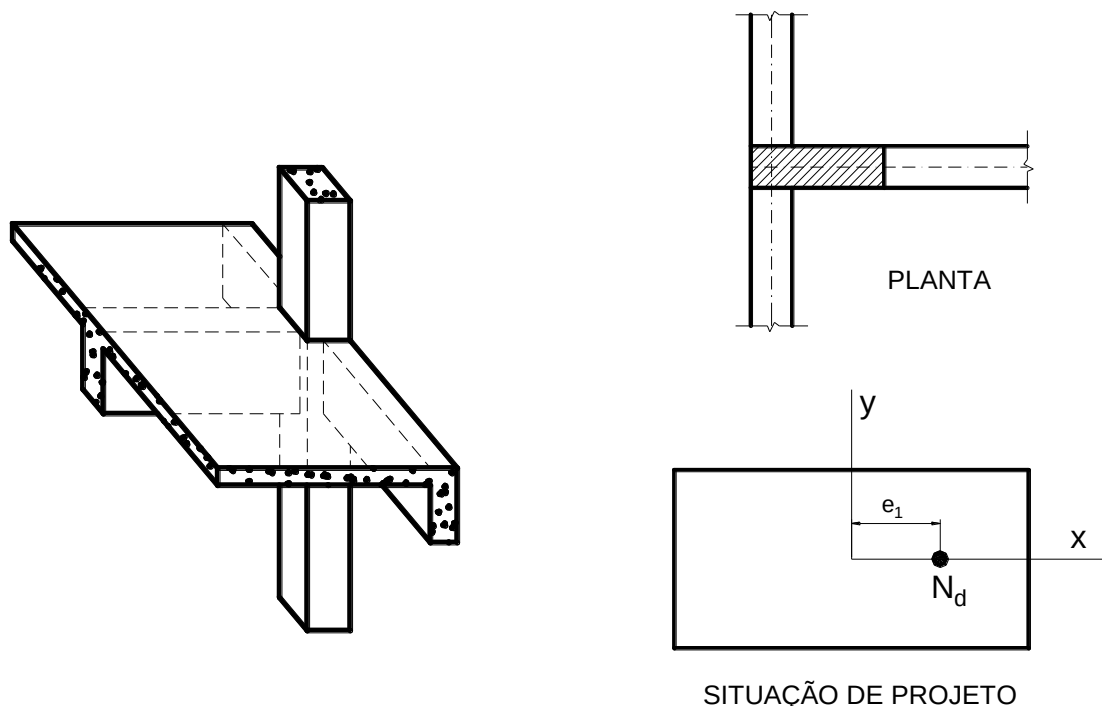


Figura 22 – Arranjo estrutural e situação de projeto dos pilares de extremidade.

Os momentos fletores M_A e M_B são devidos aos carregamentos verticais sobre as vigas, e obtidos calculando-se os pilares em conjunto com as vigas, formando pórticos planos, ou, de uma maneira mais simples e que pode ser feita manualmente, com a aplicação das equações já apresentadas em BASTOS (2015).⁶ Conforme a Figura 23, os momentos fletores, nos lances inferior e superior do pilar, são:

$$M_{\text{inf}} = M_{\text{eng}} \frac{r_{\text{inf}}}{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{viga}}} \quad \text{Eq. 43}$$

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{eng}} \frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{viga}}} \quad \text{Eq. 44}$$

⁶ BASTOS, P.S.S. *Vigas de Concreto Armado*. Disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia - Universidade Estadual Paulista, jun/2015, 56p. http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

com: M_{eng} = momento fletor de engastamento perfeito na ligação entre a viga e o pilar;
 $r = I/\ell$ = índice de rigidez relativa;
 I = momento de inércia da seção transversal do pilar na direção considerada;
 ℓ = vão efetivo do tramo adjacente da viga ao pilar extremo, ou comprimento de flambagem do pilar.

Na determinação dos momentos fletores de 1ª ordem que ocorrem nos pilares de edifícios de pavimentos deve-se considerar a superposição dos efeitos das vigas dos diferentes níveis (Figura 23). Considerando-se por exemplo o lance (tramo) do pilar compreendido entre os pavimentos i e $i + 1$, os momentos fletores na base e no topo do lance são:

$$\begin{aligned} M_{base} &= M_{sup,i} + 0,5 M_{inf,i+1} \\ M_{topo} &= M_{inf,i+1} + 0,5 M_{sup,i} \end{aligned} \quad \text{Eq. 45}$$

Se os pavimentos i e $i + 1$ forem pavimentos tipo, ou seja, idênticos, os momentos fletores na base e no topo serão iguais e:

$$\begin{aligned} M_{sup,i} &= M_{inf,i+1} \\ M_{base} &= M_{topo} = 1,5 M_{sup,i} = 1,5 M_{inf,i+1} \end{aligned} \quad \text{Eq. 46}$$

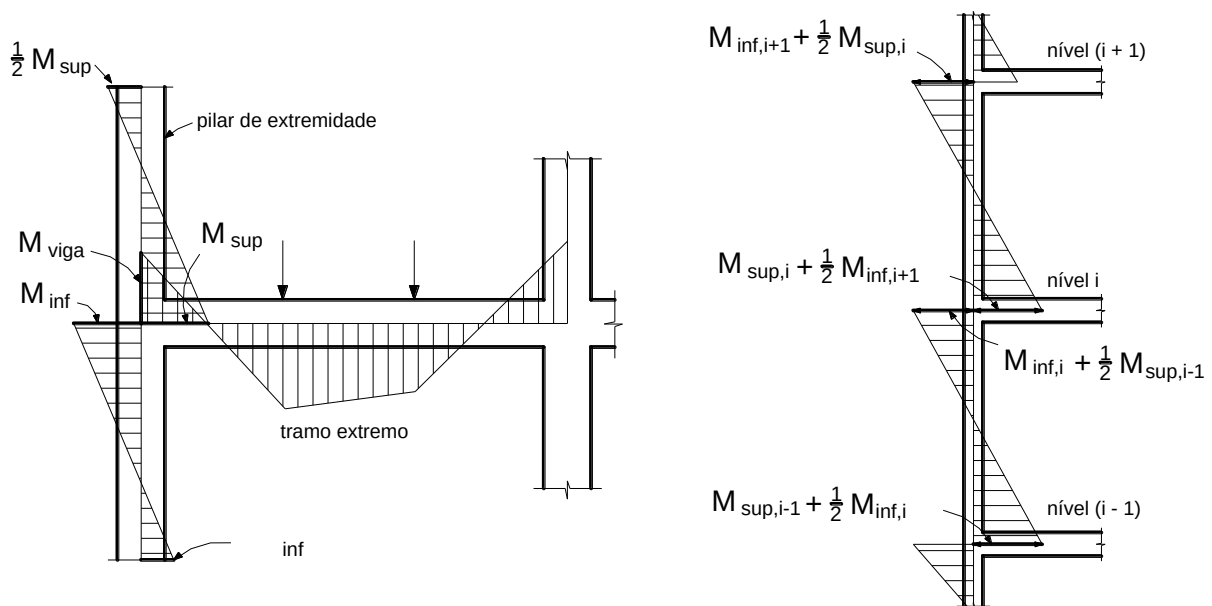


Figura 23 – Momentos fletores nos pilares de extremidade provenientes da ligação com a viga não contínua sobre o pilar (FUSCO, 1981).

Os exemplos numéricos apresentados no item 21 mostram o cálculo dos momentos fletores solicitantes por meio da Eq. 43 a Eq. 46.

10.3 Pilar de Canto

De modo geral, os pilares de canto encontram-se posicionados nos cantos dos edifícios, vindo daí o nome, como mostrado na Figura 24. Na situação de projeto ocorre a flexão composta oblíqua, decorrente da não continuidade das vigas apoiadas no pilar. Existem, portanto, os momentos fletores M_A e M_B de 1ª ordem, nas suas duas direções do pilar, ou seja, e_{1x} e e_{1y} . Esses momentos podem ser calculados da mesma forma como apresentado nos pilares de extremidade.

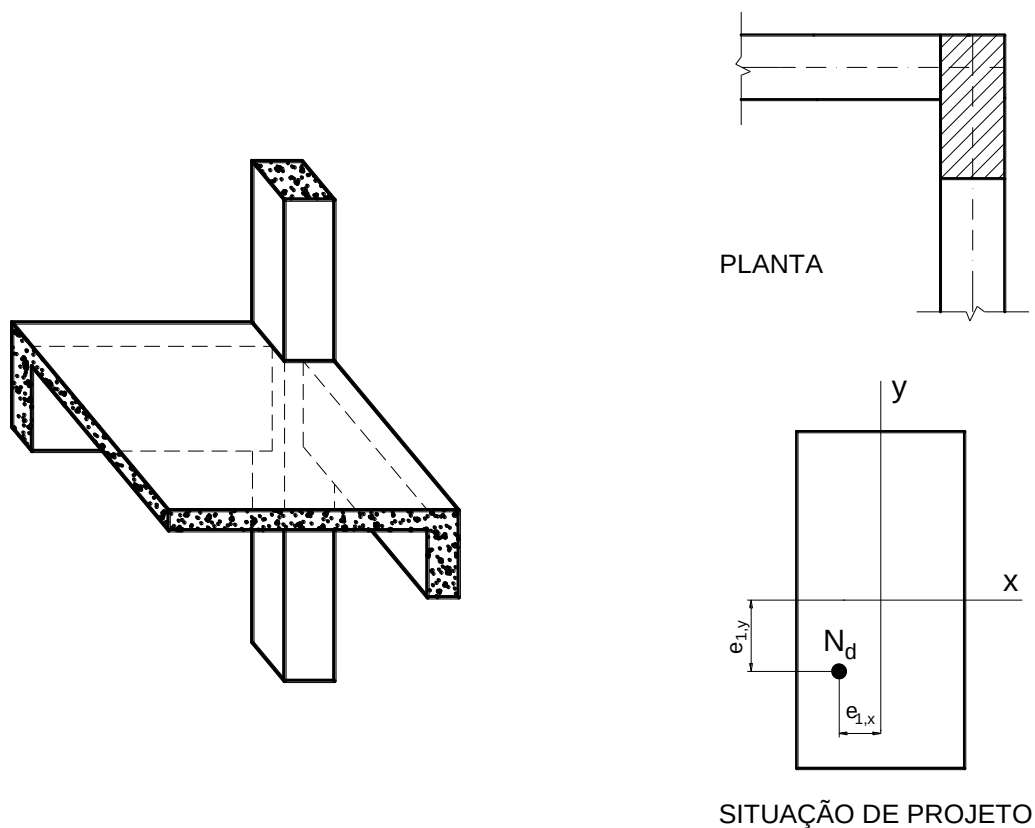


Figura 24 – Arranjo estrutural e situação de projeto dos pilares de canto.

11 DETERMINAÇÃO DA SEÇÃO SOB O MÁXIMO MOMENTO FLETOR

Sendo constante a força normal (N_d) ao longo da altura do pilar, no dimensionamento deve ser analisada qual seção do pilar, ao longo de sua altura, estará submetida ao maior momento fletor total, segundo as direções principais do pilar. Normalmente basta verificar as seções de extremidade (topo e base) e uma seção intermediária C, que é aquela correspondente ao máximo momento fletor de 2ª ordem (M_{2d}).

A Figura 25 mostra alguns casos diferentes de atuação dos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$), e mostra também os momentos fletores mínimo e de 2ª ordem. No caso de momento fletor de 1ª ordem variável ao longo da altura (lance) do pilar, o valor maior deve ser nomeado $M_{1d,A}$, e considerado positivo. O valor menor, na outra extremidade, será nomeado $M_{1d,B}$, e considerado negativo se tracionar a fibra oposta à de $M_{1d,A}$. O momento fletor de 1ª ordem existente deve ser comparado ao momento fletor mínimo ($M_{1d,min}$), e adotado o maior.

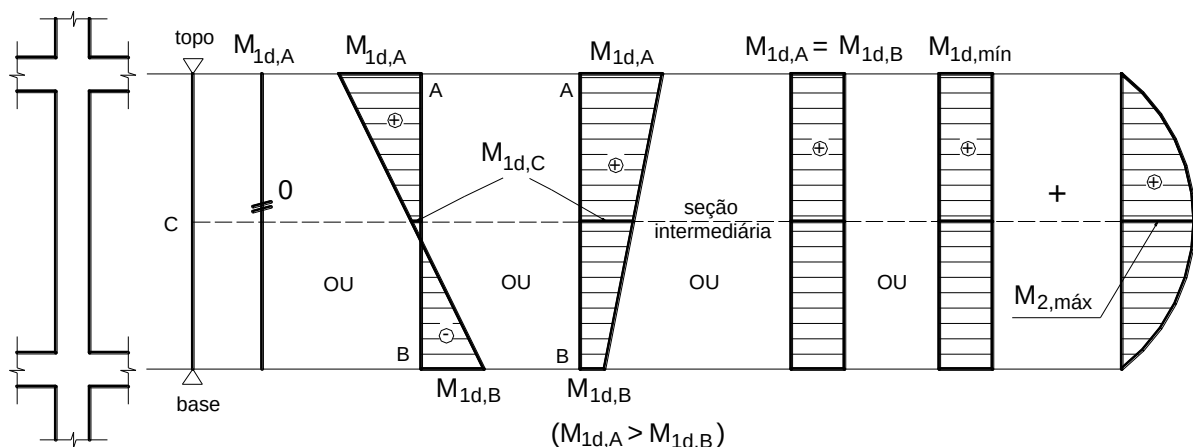


Figura 25 – Momentos fletores de 1ª ordem com o de 2ª ordem nas seções do lance do pilar.

Na determinação do máximo momento fletor total, da base ao topo do pilar, em cada direção, e considerando as seções de extremidade e a seção intermediária C, tem-se:

a) Seções de extremidade (topo ou base)

$$M_{d,tot} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,mín} \end{cases} \quad \text{Eq. 47}$$

b) Seção intermediária (C)

$$M_{d,tot} \geq \begin{cases} M_{1d,C} + M_{2d} \\ M_{1d,mín} + M_{2d} \end{cases} \quad \text{Eq. 48}$$

Com o momento de 1ª ordem $M_{1d,C}$ avaliado como:

$$M_{1d,C} \geq \begin{cases} 0,6 M_{1d,A} + 0,4 M_{1d,B} \\ 0,4 M_{1d,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 49}$$

A Eq. 49 tem os coeficientes 0,6 e 0,4 relativos à variável α_b , definida no item 7.3.

12 SITUAÇÕES DE PROJETO E DE CÁLCULO

O cálculo dos pilares pode ser feito diretamente dos valores da força normal e do momento fletor total solicitante no pilar, sem se explicitar as excentricidades da força N_d . Por outro lado, cálculo também pode ser feito explicitando as excentricidades, que são função dos momentos fletores.

No dimensionamento dos pilares, conforme a antiga NB 1/78, o cálculo era feito considerando-se as excentricidades. Já a NBR 6118 de 2003 introduziu o momento fletor mínimo e a equação do momento fletor total ($M_{d,tot}$), direcionando de certa forma o cálculo via momentos fletores e não via as excentricidades. Claro que o cálculo correto, em função dos momentos fletores ou das excentricidades, conduz aos mesmos resultados. Nos itens seguintes procura-se ilustrar os dois modos de cálculo, deixando-se ao estudante a escolha do modo a aplicar.

Nos itens seguintes estão mostradas as excentricidades que devem ser consideradas no dimensionamento dos pilares, em função do tipo de pilar (intermediário, de extremidade ou de canto) e para $\lambda_{máx} \leq 90$.

As excentricidades a serem consideradas são as seguintes:

a) Excentricidade de 1ª ordem

$$e_{1,A} = \frac{M_{1d,A}}{N_d} \quad e_{1,B} = \frac{M_{1d,B}}{N_d} \quad \text{Eq. 50}$$

b) Excentricidade mínima

$$e_{1,mín} = 1,5 + 0,03 h \quad , \text{ com } h \text{ em cm} \quad \text{Eq. 51}$$

c) Excentricidade de 2ª ordem

$$e_2 = \frac{0,0005 \ell_e^2}{(v + 0,5)h} \quad \text{Eq. 52}$$

com v definido na Eq. 20.

d) Excentricidade de 1ª ordem na seção intermediária C

$$e_{1,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1,A} + 0,4 e_{1,B} \\ 0,4 e_{1,A} \end{cases} \quad \text{Eq. 53}$$

12.1 Pilar Intermediário

A Figura 26 mostra a situação de projeto (S.P.) e as situações de cálculo (s.c.) dos pilares intermediários com $\lambda_{\text{máx}} \leq 90$. Na 1ª s.c. estão indicadas as excentricidades que ocorrem na direção x, e na 2ª s.c. as excentricidades na direção y.

Como não se considera a existência de momentos fletores de 1ª ordem, a situação de projeto é de Compressão Simples (ou Uniforme). Se o pilar tiver $\lambda \leq \lambda_1$ nas duas direções, tem-se que $e_{2x} = 0$ e $e_{2y} = 0$, e as excentricidades de 2ª ordem mostradas na Figura 26 não existirão. Neste caso basta considerar a excentricidade mínima em cada direção. Por outro lado, se $\lambda > \lambda_1$ em uma ou ambas as direções, a excentricidade de 2ª ordem deve ser somada à excentricidade mínima. A excentricidade mínima corresponde ao momento fletor mínimo, apresentado no item 9.1 (Eq. 34).

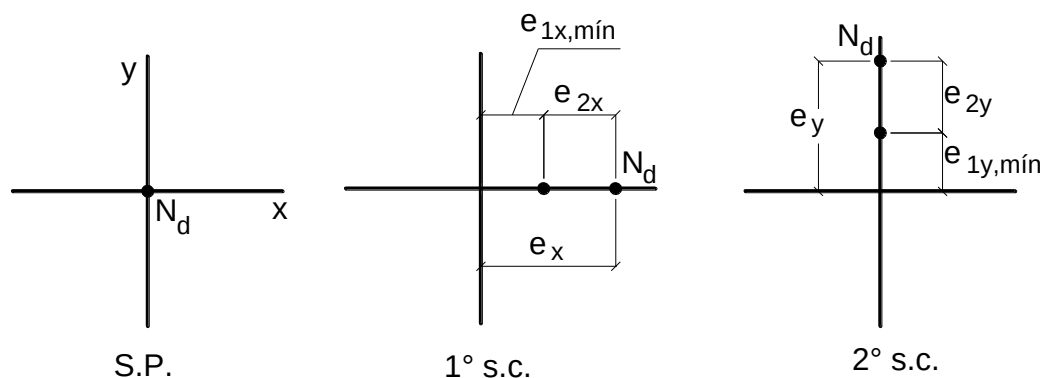


Figura 26 – Situação de projeto e situações de cálculo de pilares intermediários com $\lambda_{\text{máx}} \leq 90$.

Para cada situação de cálculo deve ser determinada uma armadura longitudinal, considerando-se, porém, o mesmo arranjo (posicionamento) das barras da armadura na seção transversal. Isso é importante porque a armadura final deve atender às situações de cálculo existentes. A armadura final é a maior entre as calculadas.

12.2 Pilar de Extremidade

No pilar de extremidade ocorre a Flexão Composta Normal na situação de projeto, com existência de excentricidade de 1ª ordem em uma direção do pilar. As seções de extremidade (topo e base) devem sempre ser analisadas (Figura 27). A seção intermediária C deve ser analisada somente na direção em que ocorrer excentricidade de 2ª ordem (Figura 28).

Na base e topo do pilar, devido aos apoios (vínculos), não ocorre deslocamento horizontal, de modo que a excentricidade de 2ª ordem é zero. Nas seções ao longo da altura do pilar ocorrem excentricidades de 2ª ordem, mas se $\lambda \leq \lambda_1$, as excentricidades são pequenas e podem ser desprezadas. Por outro lado, se ocorrer $\lambda > \lambda_1$, a máxima excentricidade de 2ª ordem (e_{2x} ou e_{2y} na seção intermediária C) deve ser considerada, e a excentricidade de 1ª ordem deve ser alterada de $e_{1x,A}$ para $e_{1x,C}$ (ou de $e_{1y,A}$ para $e_{1y,C}$) na situação de projeto (Figura 28).

Do mesmo modo como no pilar intermediário, para cada situação de cálculo deve ser calculada uma armadura, considerando-se o mesmo arranjo (posicionamento) das barras na seção transversal, e a armadura final será a maior entre as calculadas.

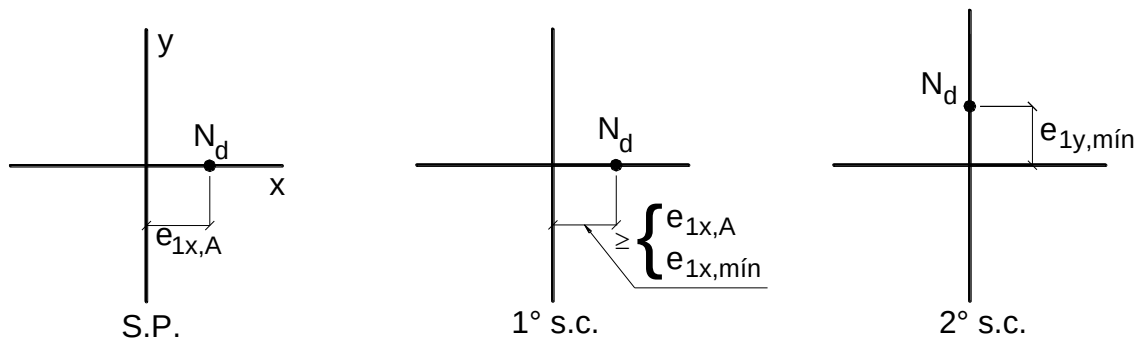


Figura 27 – Situação de projeto e de cálculo para as seções de extremidade (topo e base) dos pilares de extremidade.

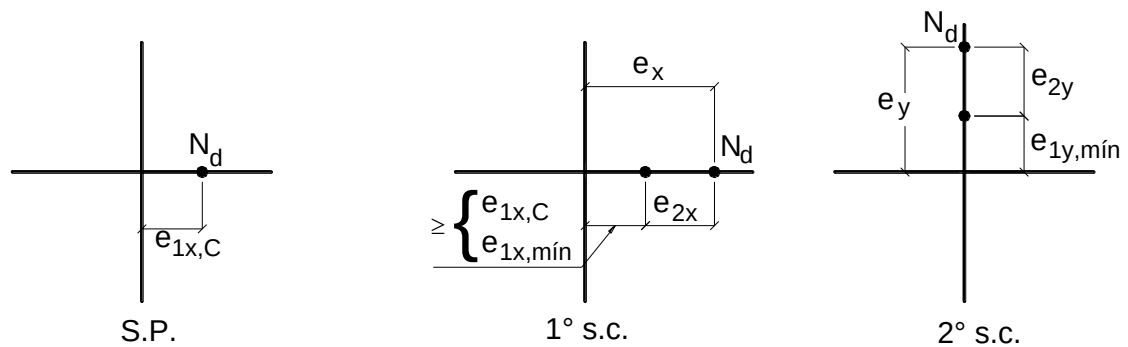


Figura 28 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária dos pilares de extremidade.

12.3 Pilar de Canto

No pilar de canto a solicitação de projeto é a flexão composta oblíqua, com a existência de excentricidade de 1ª ordem nas duas direções principais do pilar. Na seção de extremidade A, como mostrado na Figura 29, apenas uma situação de cálculo é suficiente, comparando-se as excentricidades de 1ª ordem com as excentricidades mínimas em cada direção.

Na seção intermediária C as excentricidades de 1ª ordem alteram-se de $e_{1,A}$ para $e_{1,C}$, como apresentado na Figura 30. Existindo as excentricidades de 2ª ordem, elas devem ser acrescentadas às excentricidades de 1ª ordem, segundo a direção em que existir.

A armadura final do pilar será a maior calculada entre as situações de cálculo, considerando-se as barras distribuídas de modo idêntico no cálculo das armaduras.

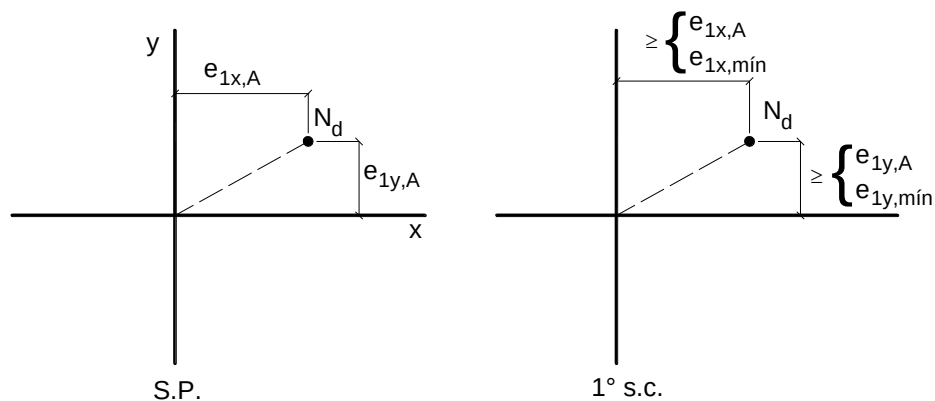


Figura 29 – Situação de projeto e de cálculo para as seções de extremidade dos pilares de canto.

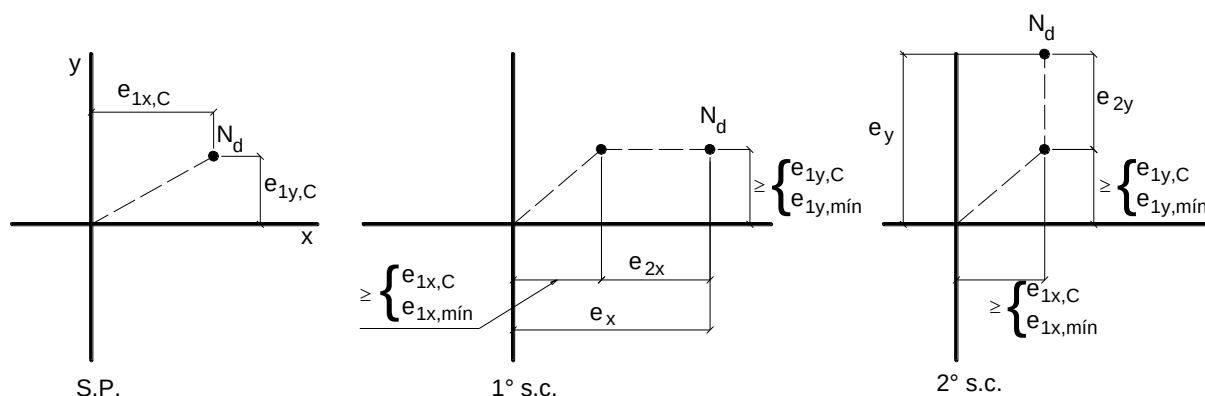


Figura 30 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária dos pilares de canto.

13 CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL COM AUXÍLIO DE ÁBACOS

No dimensionamento dos pilares feito manualmente, os ábacos são imprescindíveis, porque permitem a rápida determinação da taxa de armadura, sem necessidade de aplicar as equações teóricas da Flexão Composta Normal ou Oblíqua. Além disso, os ábacos proporcionam a fácil escolha de diferentes arranjos de armadura na seção transversal.

Nesta apostila serão aplicados os ábacos de VENTURINI (1987)⁷ para a Flexão Composta Normal e de PINHEIRO (1994)⁸ para a Flexão Composta Oblíqua. Esses ábacos devem ser aplicados apenas no dimensionamento de pilares com concretos do Grupo I de resistência ($f_{ck} \leq 50$ MPa), porque foram desenvolvidos com alguns parâmetros numéricos que não se aplicam aos concretos do Grupo II.

Para cada caso de solicitação, ábacos diferentes podem ser utilizados, no entanto, o ábaco deve ser escolhido de modo a resultar na menor armadura, e assim a mais econômica.

13.1 Flexão Composta Normal

A Figura 31 mostra a notação aplicada na utilização dos ábacos de VENTURINI (1987) para a Flexão Composta Normal (ou Reta). A distância d' é paralela à excentricidade (e), entre a face da seção e o centro da barra do canto. De modo geral tem-se $d' = c + \phi_t + \phi_l/2$, com c = cobrimento de concreto, ϕ_t = diâmetro do estribo e ϕ_l = diâmetro da barra longitudinal.

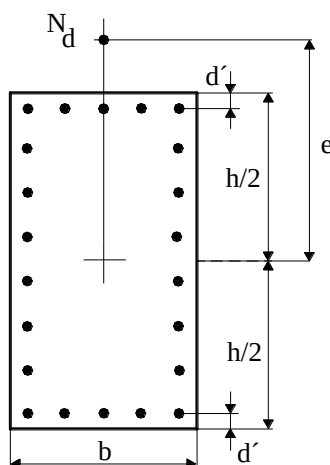


Figura 31 – Notação para a Flexão Composta Normal (VENTURINI, 1987).

⁷ VENTURINI, W.S. *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1987. Disponível em: http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

⁸ PINHEIRO, L.M. ; BARALDI, L.T. ; POREM, M.E. *Concreto Armado: Ábacos para flexão oblíqua*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1994. Disponível em: http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

As equações para a construção dos ábacos foram apresentadas na publicação de VENTURINI (1987). A determinação da armadura longitudinal é iniciada pelo cálculo dos esforços adimensionais v (ni) e μ (mi). O valor adimensional v foi definido na Eq. 20:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

O valor de μ , em função do momento fletor ou da excentricidade, é:

$$\mu = \frac{M_{d,tot}}{h A_c f_{cd}}, \text{ ou} \quad \text{Eq. 54}$$

$$\mu = v \frac{e}{h} \quad \text{Eq. 55}$$

com: N_d = força normal de cálculo;
 A_c = área da seção transversal do pilar;
 f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão (f_{ck}/γ_c);
 $M_{d,tot}$ = momento fletor total de cálculo;
 h = dimensão do pilar na direção considerada;
 e = excentricidade na direção considerada.

Escolhida uma disposição construtiva para a armadura no pilar, determina-se o ábaco a ser utilizado, em função do tipo de aço e do valor da relação d'/h . No ábaco, com o par v e μ , obtém-se a taxa mecânica ω . A armadura é calculada pela expressão:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} \quad \text{Eq. 56}$$

13.2 Flexão Composta Oblíqua

A Figura 32 mostra a notação aplicada na utilização dos ábacos de PINHEIRO et al. (1994) para a Flexão Composta Oblíqua. As distâncias d'_x e d'_y têm o mesmo significado de d' , porém, cada uma em uma direção do pilar.

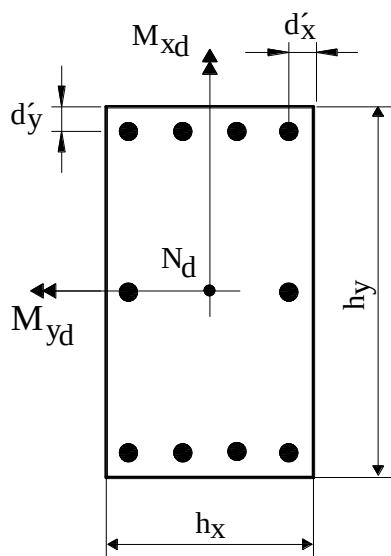


Figura 32 – Flexão Composta Oblíqua (PINHEIRO, 1994).

A determinação da armadura é iniciada pelo cálculo dos esforços adimensionais v e μ , com μ segundo as duas direções principais do pilar:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x A_c f_{cd}} = v \frac{e_x}{h_x} \quad \text{Eq. 57}$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y A_c f_{cd}} = v \frac{e_y}{h_y} \quad \text{Eq. 58}$$

Escolhida uma disposição construtiva para a armadura no pilar, determina-se o ábaco a ser utilizado, em função do tipo de aço e dos valores das relações d'_x/h_x e d'_y/h_y . No ábaco, com o trio (v, μ_x, μ_y) , obtém-se a taxa mecânica ω . A armadura é calculada com a Eq. 56:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}}$$

14 RELAÇÃO ENTRE A DIMENSÃO MÍNIMA E O COEFICIENTE DE PONDERAÇÃO

Os pilares com seção transversal retangular são diferenciados dos pilares-parede em função da relação entre os lados, conforme a regra (Figura 33):

$$\begin{aligned} h \leq 5 \text{ b} &\rightarrow \text{pilar} \\ h > 5 \text{ b} &\rightarrow \text{pilar-parede} \end{aligned} \quad \text{Eq. 59}$$

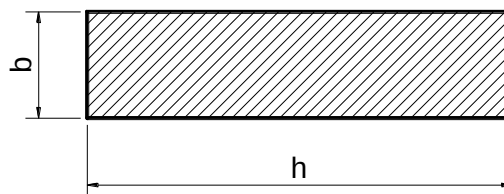


Figura 33 – Classificação dos pilares e pilares-parede de seção retangular.

A NBR 6118 (item 13.2.3) impõe que “A seção transversal de pilares e pilares-parede maciços, qualquer que seja a sua forma, não pode apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19 cm e 14 cm, desde que se multipliquem os esforços solicitantes de cálculo a serem considerados no dimensionamento por um coeficiente adicional γ_n , de acordo com o indicado na Tabela 13.1 e na Seção 11. Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm².”, o que representa a seção mínima de 14 x 25,7 cm. A Tabela 4 apresenta o coeficiente adicional. É importante salientar que o texto indica que todos os esforços solicitantes atuantes no pilar devem ser majorados por γ_n , ou seja, a força normal e os momentos flettores que existirem.

Tabela 4 – Coeficiente adicional γ_n para pilares e pilares-parede (Tabela 13.1 da NBR 6118).

b	≥ 19	18	17	16	15	14
γ_n	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Nota: O coeficiente γ_n deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo quando de seu dimensionamento.

$\gamma_n = 1,95 - 0,05 b$
b = menor dimensão da seção transversal (cm).

15 CÁLCULO DOS PILARES INTERMEDIÁRIOS

Apresenta-se o roteiro de cálculo dos chamados pilares intermediários, com a aplicação do “Método do pilar-padrão com curvatura aproximada” e do “Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada”. Em seguida são apresentados dois exemplos numéricos de aplicação.

15.1 Roteiro de Cálculo

No pilar intermediário, devido à continuidade das vigas e lajes sobre o pilar, tem-se que os momentos fletores de 1ª ordem são nulos em ambas as direções do pilar ($M_A = M_B = 0$), portanto, $e_1 = 0$.

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo pode ser determinada como:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k \quad \text{Eq. 60}$$

onde: N_k = força normal característica do pilar;

γ_n = coeficiente de majoração da força normal (Tabela 4);

γ_f = coeficiente de ponderação das ações no ELU (definido na Tabela 11.1 da NBR 6118).

b) Índice de esbeltez (Eq. 29 e Eq. 30)

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i}, \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \rightarrow \text{ para seção retangular: } \lambda = \frac{3,46 \ell_e}{h}$$

c) Momento fletor mínimo (Eq. 34)

$$M_{1d,\min} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h = \text{dimensão do pilar, em cm, na direção considerada.}$$

d) Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

$e_1 = 0$ para pilar intermediário.

$\lambda \leq \lambda_1 \rightarrow$ não considera-se o efeito local de 2ª ordem na direção considerada;

$\lambda > \lambda_1 \rightarrow$ considera-se o efeito local de 2ª ordem na direção considerada.

e) Momento de 2ª ordem

e1) Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

Determina-se $M_{d,\text{tot}}$ com a Eq. 33:

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,\min} \end{cases} \quad , \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

e2) Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

Determina-se $M_{d,\text{tot}}$ com a Eq. 41:

$$19200 M_{d,\text{tot}}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,\text{tot}} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

15.2 Exemplos Numéricos

Os exemplos numéricos a seguir são de pilares intermediários, biapoiados na base e no topo, de nós fixos (contraventados) e sem forças transversais atuantes. Os cálculos serão feitos em função dos momentos fletores solicitantes e, a título de exemplo, serão feitos também em função das excentricidades, segundo as seções de extremidade e intermediária, como mostrado no item 11.

Os seguintes dados são comuns em todos os exemplos: concreto C20; aço CA-50 ; $d' = 4,0$ cm ; coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

15.2.1 Exemplo 1

Dimensionar a armadura longitudinal vertical do pilar mostrado na Figura 34, sendo conhecidos:

$N_k = 785,7$ kN ; seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000$ cm²)

comprimento equivalente (de flambagem): $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280$ cm

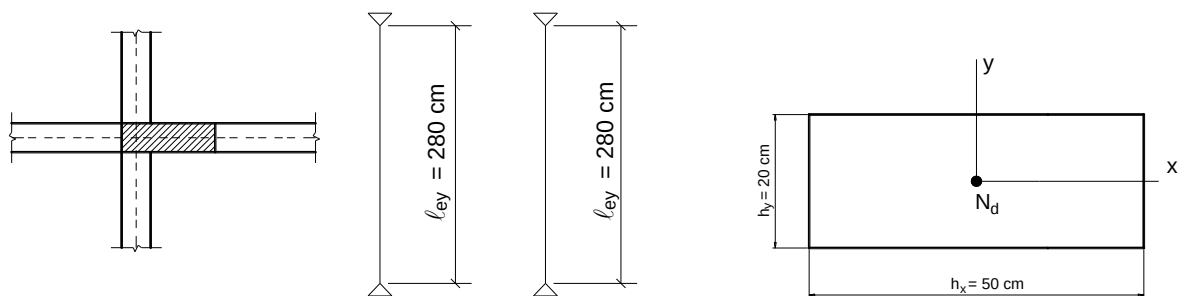


Figura 34 – Posição do pilar em relação às vigas, vínculos na base e no topo nas direções x e y, dimensões da seção transversal e situação de projeto.

RESOLUÇÃO

Embora a armadura longitudinal resultará do cálculo segundo a direção de menor rigidez do pilar (dir. y), a título de exemplo será demonstrado também o cálculo segundo a direção x.

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é (Eq. 60): $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 785,7 = 1.100$ kN

com γ_n determinado na Tabela 4, em função da largura da seção transversal do pilar. Tratando-se de um pilar intermediário, não existem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem em ambas as direções do pilar.

b) Índice de esbeltez (Eq. 30)

O índice de esbeltez deve ser calculado para as direções x e y, conforme os eixos mostrados na Figura 34. A fim de padronizar e simplificar a notação, aqui considera-se a direção, e não o eixo do pilar, o que pode ser diferente de considerações adotadas em outras disciplinas.

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção, é calculado com a Eq. 34:

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm.

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 1100 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.300 \text{ kN.cm ; } e_{1x,min} = \frac{3300}{1100} = 3,00 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 1100 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2.310 \text{ kN.cm ; } e_{1y,min} = \frac{2310}{1100} = 2,10 \text{ cm}$$

Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, daí $e_1 = 0$ e $\alpha_b = 1,0$ (ver item 7.3). Assim:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} \rightarrow \therefore$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 48,4 > \lambda_{1,y} \rightarrow \therefore$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

Em pilares retangulares correntes, geralmente há a necessidade de considerar a excentricidade de 2ª ordem na direção da largura do pilar.

e) Momento de 2ª ordem

O momento de 2ª ordem será avaliado pelos métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e do pilar-padrão com rigidez κ aproximada.

e1) Método do pilar-padrão com curvatura aproximada (Eq. 33)

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases}, \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 20): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1100}{1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,77$$

Curvatura na direção y sujeita aos momentos fletores de 2ª ordem (Eq. 19):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,77+0,5)} = 1,9685 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção y é (Eq. 17):

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10 r} = \frac{280^2}{10} 1,9685 \cdot 10^{-4} = 1,54 \text{ cm}$$

Com $\alpha_b = 1,0$ e fazendo $M_{1d,A} = M_{1d,min}$ em cada direção, tem-se os momentos fletores totais em cada direção principal do pilar:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = M_{1d,min,x} = 3.300 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} = 1,0 \cdot 2310 + 1100 \frac{280^2}{10} 1,9685 \cdot 10^{-4} = 4.008 \text{ kN.cm}$$

$$M_{d,\text{tot},y} = 4.008 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\text{mín},y} = 2.310 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

O cálculo de dimensionamento da armadura longitudinal do pilar pode seguir após determinados os momentos fletores totais, como mostrados na Figura 35. No entanto, a título de exemplo, são mostradas também as excentricidades (Figura 36), calculadas em função dos momentos fletores. O valor adimensional μ pode ser calculado em função do momento fletor ou da excentricidade, como feito na sequência.

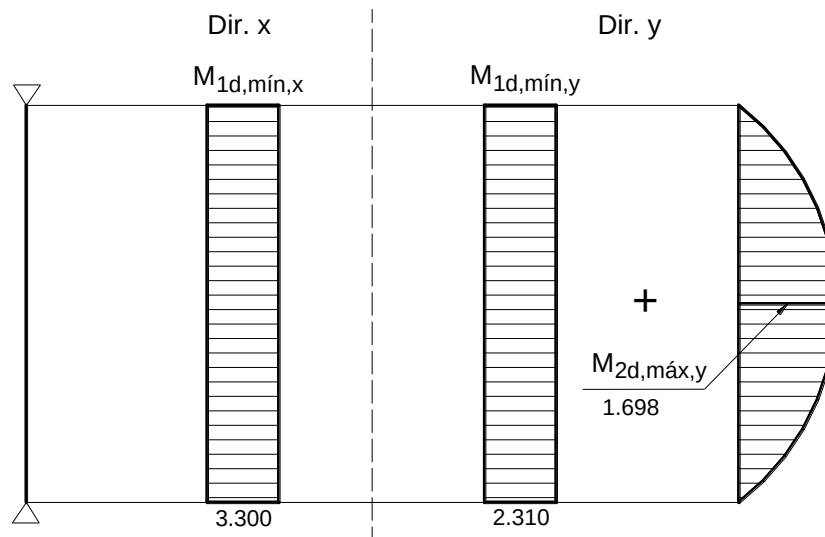


Figura 35 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

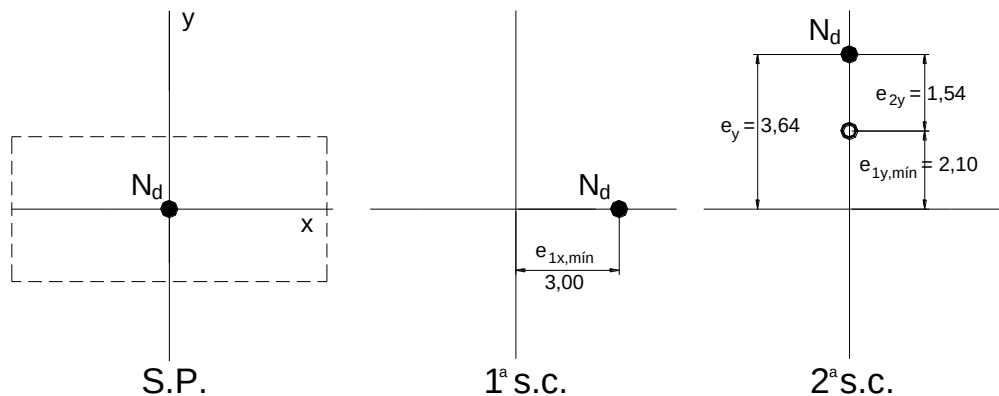


Figura 36 – Situação de projeto e situações de cálculo do pilar intermediário.

A análise dos momentos fletores totais e das excentricidades permite observar que a direção crítica do pilar é a direção y, dado que o maior momento fletor total ($M_{d,\text{tot},y}$ de 4.008 kN.cm) é relativo à menor dimensão do pilar (largura $h_y = 20$ cm). A 2ª s.c., com a maior excentricidade total, na direção da largura do pilar, também mostra o fato, comprovado pelo cálculo da armadura longitudinal. A armadura pode ser calculada apenas para a direção crítica y, porém, com o objetivo de ilustrar os cuidados que devem ser tomados, a armadura é calculada para as duas direções principais do pilar.

Com $\nu = 0,77$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987)⁹ para Flexão Reta, faz-se o cálculo de μ (Eq. 54 ou Eq. 55) e d'/h , segundo as direções x e y:

Dir. x:

⁹ Os ábacos podem ser encontrados em: http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3300}{50 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,05 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,77 \frac{3,00}{50} = 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{50} = 0,08 \cong 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{com o \u00c1baco A-25: } \omega = 0,05$$

Outros \u00e1bacos diferentes do A-25 podem ser utilizados, no entanto, este \u00e1baco \u00e9 interessante porque n\u00e3o fixa o n\u00famero de barras a serem dispostas na se\u00e7\u00e3o transversal, fixa apenas as faces do pilar que devem alojar as barras. Neste caso, o \u00e1baco A-25 proporciona que as barras sejam distribu\u00eddas no lado maior do pilar.

Observe que o \u00e1baco A-25 tem a armadura posicionada na dire\u00e7\u00e3o paralela \u00e0 excentricidade – e (ver figura no \u00e1baco) da for\u00e7a normal N_d , portanto, na dire\u00e7\u00e3o horizontal paralela \u00e0 excentricidade $e_{1x,min}$ da 1\u00aa s.c., coincidente com o lado maior do pilar.

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4008}{20 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,14 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,77 \frac{3,64}{20} = 0,14$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{com o \u00c1baco A-4: } \omega = 0,38$$

Para a solicita\u00e7\u00e3o na dire\u00e7\u00e3o y o \u00e1baco A-4 \u00e9 compat\u00edvel com o \u00e1baco A-25 da dire\u00e7\u00e3o x, pois proporciona o mesmo arranjo de barras do \u00e1baco A-25 na se\u00e7\u00e3o transversal, ou seja, as barras distribu\u00eddas ao longo do lado maior do pilar. Isso \u00e9 mostrado na figura do \u00e1baco A-4, onde a armadura \u00e9 posicionada na dire\u00e7\u00e3o perpendicular \u00e0 excentricidade da for\u00e7a normal N_d , portanto, na dire\u00e7\u00e3o horizontal perpendicular \u00e0 excentricidade total da 2\u00aa s.c., e coincidente com o lado maior do pilar.

A maior armadura resulta do maior valor de ω , de 0,38 da 2\u00aa s.c., como esperado:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,38 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 12,49 \text{ cm}^2$$

e2) M\u00e9todo do pilar-padr\u00e3o com rigidez κ aproximada

Aplicando a Eq. 41 numericamente para a dire\u00e7\u00e3o y, com $M_{1d,A} = M_{1d,min}$, tem-se:

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1100 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1100 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 2310) M_{d,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1100 \cdot 2310 = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 - 11408320 M_{d,tot} - 1,951488 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{d,tot}^2 - 594,2 M_{d,tot} - 10164000 = 0$$

A raiz positiva da equa\u00e7\u00e3o de 2\u00b0 grau \u00e9:

$$M_{d,tot} = 3.500 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,min,y} = 2.310 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Com $v = 0,77$ e utilizando os \u00e1bacos de VENTURINI (1987) para Flex\u00e3o Reta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3500}{20 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,12$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{com o Ábaco A-4: } \omega = 0,30$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,30 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 9,86 \text{ cm}^2$$

15.2.2 Exemplo 2

Este segundo exemplo (Figura 37) é igual ao primeiro, com exceção da maior força normal de compressão. São conhecidos:

$$N_k = 1.071 \text{ kN}$$

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$)

comprimento de flambagem:

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

coeficientes de ponderação:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4 \quad ; \quad \gamma_s = 1,15$$

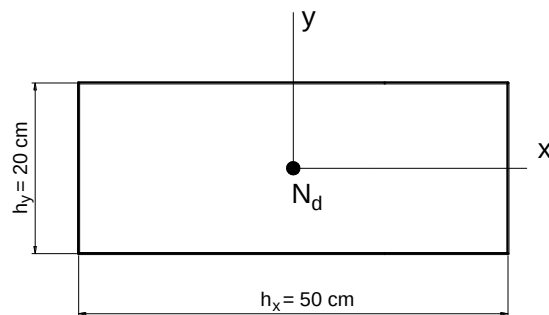


Figura 37 – Dimensões da seção transversal e posição da força normal.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1071 = 1.500 \text{ kN}$, com γ_n da Tabela 4.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo em cada direção é:

$$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm.}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 1500 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 4.500 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1x,min} = \frac{4500}{1500} = 3,00 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 1500 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 3.150 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1y,min} = \frac{3150}{1500} = 2,10 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Tem-se que $\alpha_b = 1,0$ e $e_1 = 0$, portanto, do mesmo modo como no exemplo anterior:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} \rightarrow \therefore \text{n\~{o} s\~{a}o considerados os efeitos locais de 2^a ordem na dire\~{c}\~{a}o x;}$$

$$\lambda_y = 48,4 > \lambda_{1,y} \rightarrow \therefore \text{s\~{a}o considerados os efeitos locais de 2^a ordem na dire\~{c}\~{a}o y.}$$

e) Momento de 2ª ordem

O momento de 2ª ordem ser\~{a} avaliado pelos m\~{e}todos do pilar-padr\~{a}o com curvatura aproximada e do pilar-padr\~{a}o com rigidez κ aproximada.

e1) M\~{e}todo do pilar-padr\~{a}o com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,m\acute{i}n} \end{cases}, \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,m\acute{i}n}$$

$$\text{For\~{c}a normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1500}{1000 \frac{2,0}{1,4}} = 1,05$$

Curvatura na dire\~{c}\~{a}o y sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{20(1,05 + 0,5)} = 1,6129 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{0,20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade m\~{a}xima de 2ª ordem na dire\~{c}\~{a}o y \~{e}:

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10 r} = \frac{280^2}{10} 1,6129 \cdot 10^{-4} = 1,26 \text{ cm}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,m\acute{i}n}$ em cada dire\~{c}\~{a}o, tem-se os momentos totais m\~{a}ximos:

$$\text{Dir. x: } M_{d,tot,x} = M_{1d,m\acute{i}n,x} = 4.500 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,tot,y} = 1,0 \cdot 3.150 + 1500 \frac{280^2}{10} 1,6129 \cdot 10^{-4} = 5.047 \text{ kN.cm}$$

$$M_{d,tot,y} = 5.047 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,m\acute{i}n,y} = 3.150 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar, nas dire\~{c}\~{a}o es x e y, est\~{a}o indicados na Figura 38. A situa\~{c}\~{a}o de projeto e as situa\~{c}\~{a}o es de c\~{a}lculo est\~{a}o mostradas na Figura 39.

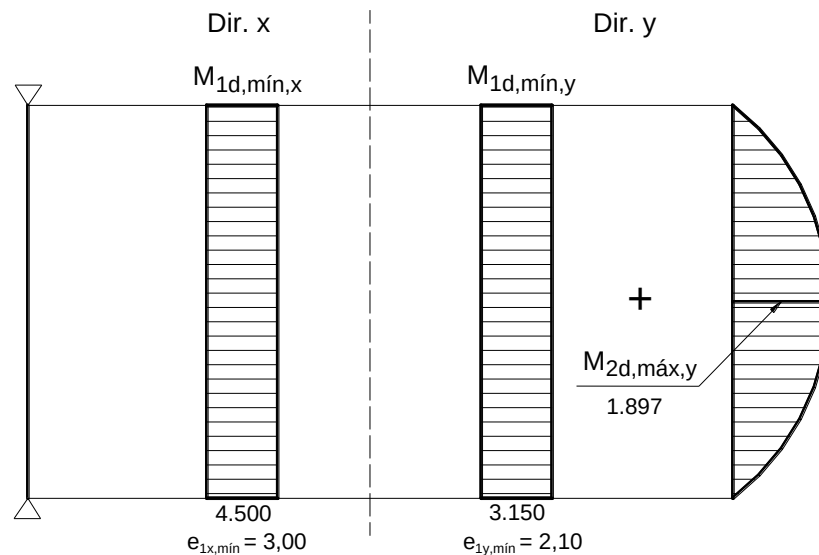


Figura 38 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

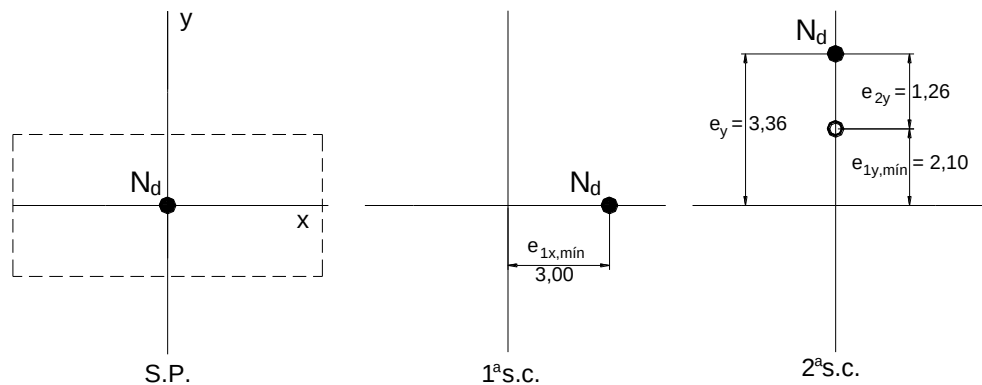


Figura 39 – Situação de projeto e situações de cálculo.

Com $v = 1,05$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987)¹⁰ para Flexão Reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4500}{50 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,06 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 1,05 \frac{3,00}{50} = 0,06$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{50} = 0,08 \cong 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-25: } \omega = 0,38$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5047}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,18 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 1,05 \frac{3,36}{20} = 0,18$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,78$$

¹⁰ Os ábacos podem ser encontrados em: http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

A comparação entre os ábacos A-4 e A-25 apresentada no exemplo anterior vale também para este exemplo. A maior armadura resulta do maior valor encontrado para a taxa de armadura ω :

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,78 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 25,63 \text{ cm}^2$$

e2) Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

Aplicando a Eq. 41 numericamente para a direção y tem-se:

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1500 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1500 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3150) M_{d,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1500 \cdot 3150 = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 - 15556800 M_{d,tot} - 3,6288 \cdot 10^{11} = 0$$

$$M_{d,tot}^2 - 810,25 M_{d,tot} - 18900000 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é:

$$M_{d,tot} = 4.771 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min} = 3.150 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Com $\nu = 1,05$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4771}{20 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,17$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \text{Ábaco A-4} \quad (\omega = 0,76)$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,76 \cdot 1000 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 24,97 \text{ cm}^2$$

Comparando-se com o Exemplo 1 nota-se um aumento considerável da armadura, em torno de 100 %, para um aumento de apenas 36 % para a força normal do exemplo 2.

Embora apenas dois exemplos numéricos tenham sido apresentados, pelos valores obtidos pode-se observar que o método da rigidez aproximada resulta armaduras inferiores ao método da curvatura aproximada. Para a força normal maior a diferença de armadura diminuiu de 21,1 % para 2,6 %.

16 CÁLCULO DOS PILARES DE EXTREMIDADE

Apresenta-se a seguir um roteiro de cálculo dos chamados pilares de extremidade, com a aplicação do “Método do pilar-padrão com curvatura aproximada” e do “Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada”. Em seguida são apresentados quatro exemplos numéricos de aplicação.

16.1 Roteiro de Cálculo

a) Esforços solicitantes

$$A \text{ força normal de cálculo pode ser determinada como } N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k$$

onde: N_k = força normal característica do pilar;
 γ_n = coeficiente de majoração da força normal (Tabela 4);
 γ_f = coeficiente de ponderação das ações no ELU (definido na Tabela 11.1 da NBR 6118).

b) Índice de esbeltez (Eq. 29 e Eq. 30)

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \quad ; \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \rightarrow \quad \text{para seção retangular: } \lambda = \frac{3,46 \ell_e}{h}$$

c) Momento fletor mínimo (Eq. 34)

$$M_{1d,\min} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h = \text{dimensão do pilar, em cm, na direção considerada.}$$

d) Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

$e_1 \neq 0$ na direção da viga não contínua sobre o pilar de extremidade;
 h = dimensão do pilar na mesma direção de e_1 ;
 $\lambda \leq \lambda_1$ - não se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada;
 $\lambda > \lambda_1$ - se considera o efeito local de 2ª ordem na direção considerada.

e) Momento de 2ª ordem

e1) Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

Determina-se $M_{d,\text{tot}}$ com a Eq. 33:

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,\min} \end{cases} \quad , \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

e2) Método do pilar-padrão com rigidez K aproximada

Determina-se $M_{d,\text{tot}}$ com a Eq. 41:

$$19200 M_{d,\text{tot}}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,\text{tot}} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

16.2 Exemplos Numéricos

Os exemplos numéricos a seguir são de pilares de extremidade, biapoiados no topo e na base, de nós fixos (contraventados) e sem forças transversais atuantes. Os seguintes dados são comuns em todos os exemplos: concreto C20 ; aço CA-50 ; $d' = 4,0$ cm, coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

16.2.1 Exemplo 1

Este exemplo é semelhante àquele encontrado em FUSCO (1981, p. 297), com a diferença da alteração do concreto, de C15 para C20, e da largura do pilar, de 25 cm para 20 cm (Figura 40). São conhecidos:

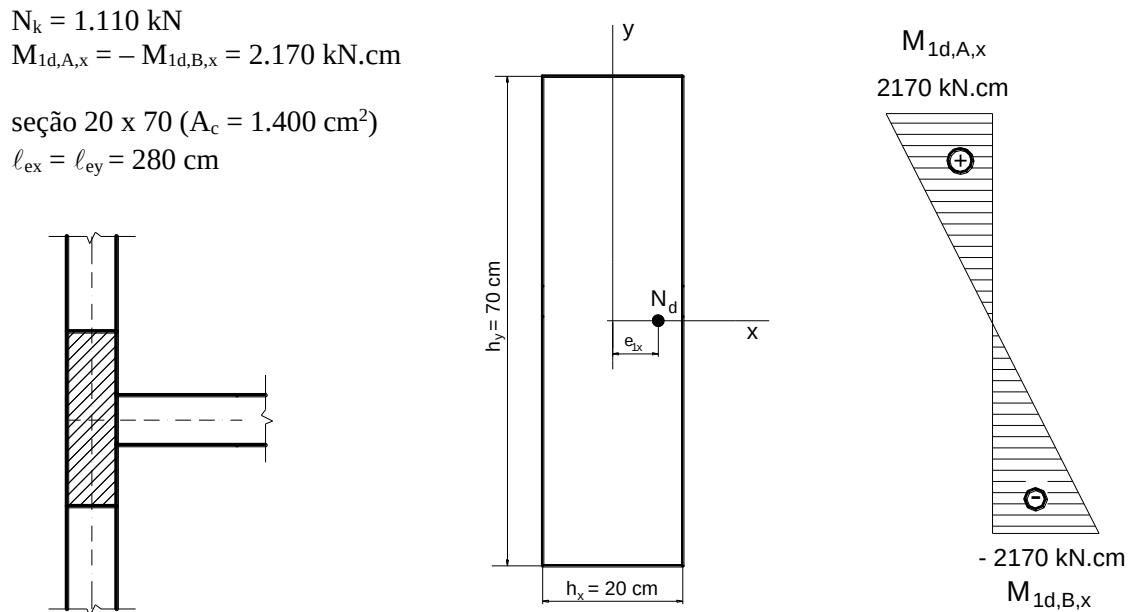


Figura 40 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal e momentos fletores de primeira ordem atuantes na direção x.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1.110 = 1.554 \text{ kN}$, com $\gamma_n = 1,0$ da Tabela 4.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores nos extremos do pilar ($M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$), que solicitam o pilar na direção x, em função de existir uma viga não contínua sobre o pilar na direção x (Figura 41). Este momento fletor também deve ser majorado por γ_n , 1,0 neste caso. A excentricidade inicial de 1ª ordem é:

$$e_{1x} = \frac{2170}{1554} = 1,40 \text{ cm}$$

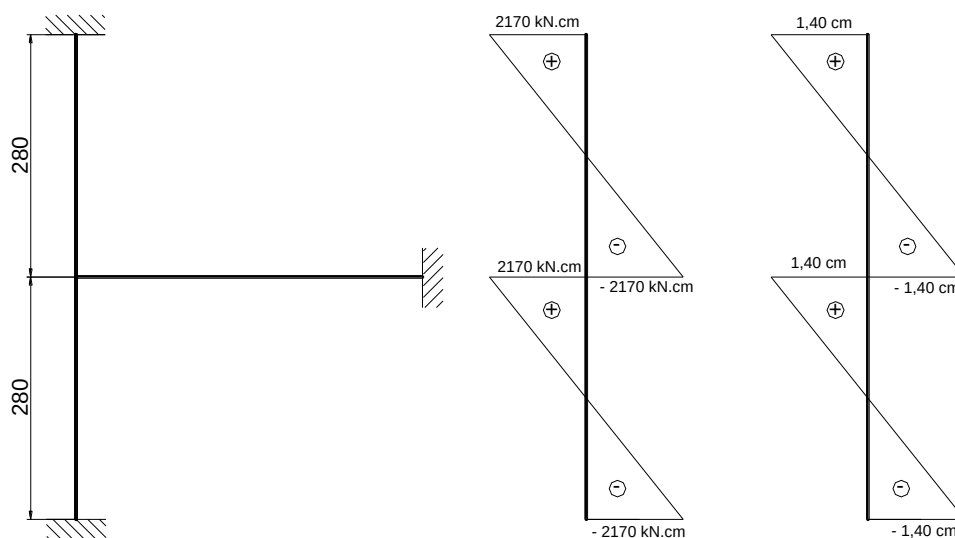


Figura 41 – Momentos fletores de cálculo de 1ª ordem e excentricidades no topo e na base do pilar, na direção x.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{70} = 13,8$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 1554 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 3.263,4 \text{ kN.cm ; } e_{1x,min} = \frac{3263,4}{1554} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 1554 (1,5 + 0,03 \cdot 70) = 5.594,4 \text{ kN.cm ; } e_{1y,min} = \frac{5594,4}{1554} = 3,60 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 1,40 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem na direção x são $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.170 \text{ kN.cm}$, menores que o momento fletor mínimo nesta direção ($M_{1d,min,x} = 3.263,4 \text{ kN.cm}$), o que leva a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,40}{20}}{1,0} = 25,9 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: Na direção y não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto, $e_{1y} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{70}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 48,4 > \lambda_{1,x} \rightarrow \therefore$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ;

$\lambda_y = 13,8 < \lambda_{1,y} \rightarrow \therefore$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y .

e) Momento de 2ª ordem

O momento fletor de 2ª ordem será avaliado pelos métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e do pilar-padrão com rigidez κ aproximada.

e1) Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases}, \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

Força normal adimensional:
$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1554}{1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,78$$

Curvatura na direção x sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{20(0,78 + 0,5)} = 1,953 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção x é:

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{280^2}{10} 1,953 \cdot 10^{-4} = 1,53 \text{ cm}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$ em cada direção, tem-se o momento fletor total máximo:

Dir. x:

$$M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 3263,4 + 1554 \frac{280^2}{10} 1,953 \cdot 10^{-4} = 5.642,8 \geq M_{1d,\min,x} = 3.263,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},x} = 5.642,8 \text{ kN.cm}$$

Dir. y:

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\min,y} = 5.594,4 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 42. As situações de projeto e de cálculo, para as seções de extremidade e intermediária, estão mostradas na Figura 43 e na Figura 44. Como as seções de extremidade de topo e base do pilar estão submetidas a momento fletor de 1ª ordem de igual valor, a seção de extremidade mostrada na Figura 43 é representativa de ambas as extremidades do pilar. No caso de momentos fletores na base e topo diferentes, deve-se considerar a seção de extremidade submetida ao maior momento fletor ($M_{1d,A}$). Nas seções de topo e base não ocorre deformação de 2ª ordem ($e_2 = 0$), que deve ser considerada na seção intermediária C.

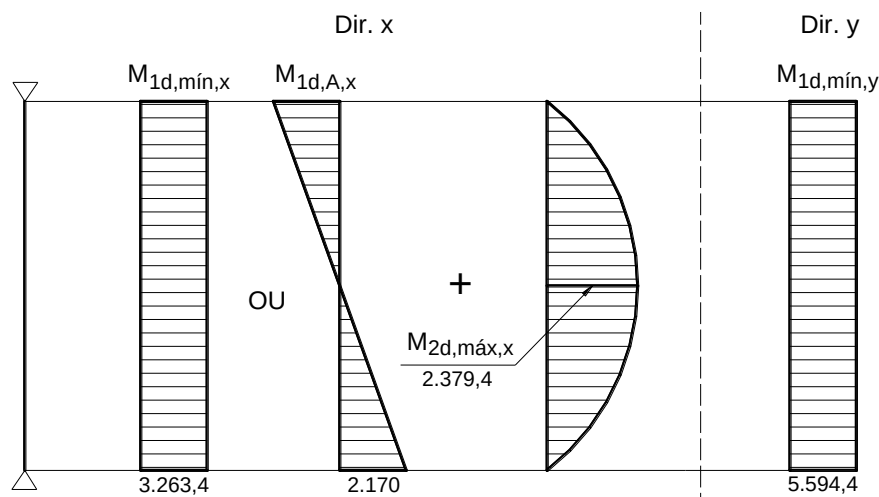


Figura 42 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

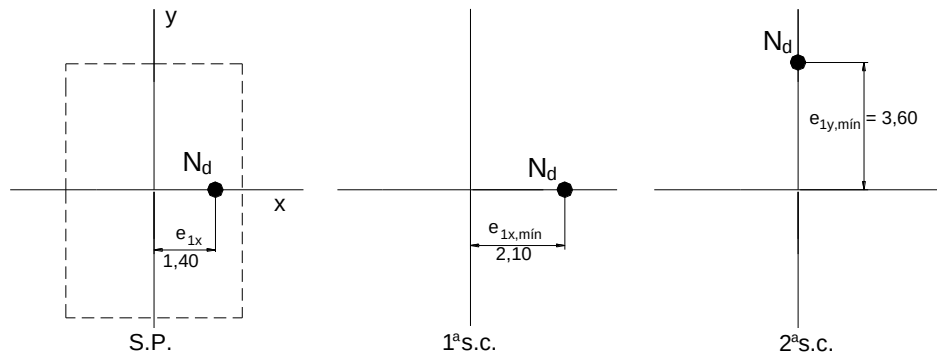


Figura 43 – Situações de projeto e de cálculo das seções de extremidade.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial (e_{1x}), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 1,40 + 0,4 \cdot (-1,40) = 0,28 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 1,40 = 0,56 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 0,56 \text{ cm}$$

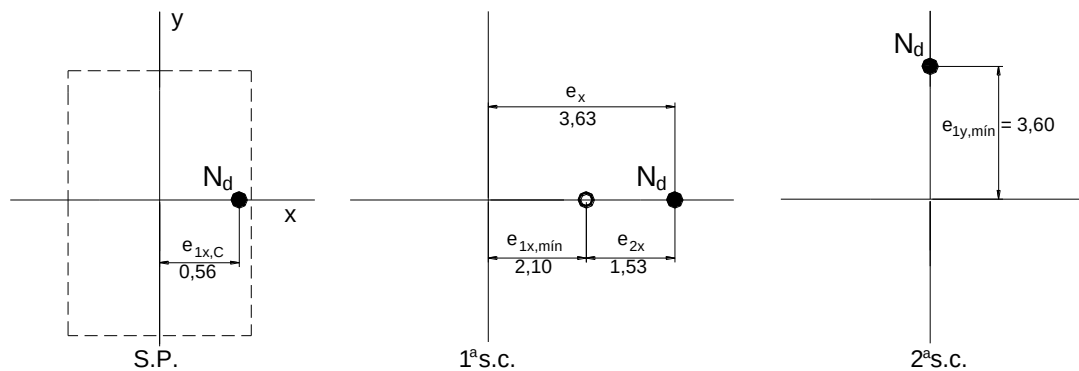


Figura 44 – Situação de projeto e situações de cálculo para a seção intermediária C.

A direção de menor rigidez do pilar, aquela que é crítica, é a correspondente à menor dimensão, ou seja, da largura no caso de pilar de seção transversal retangular (direção x). Das três situações de cálculo observa-se que a 1ª s.c. da seção intermediária, que tem a maior excentricidade, e na direção crítica do pilar, é a que resultará na maior armadura longitudinal. Em situações que existir dúvida, a armadura de cada situação de cálculo deve ser determinada, sendo a armadura final a maior entre as calculadas. A título de exemplo, o cálculo será feito para as duas situações de cálculo da seção intermediária.

Com $\nu = 0,78$ e utilizando-se os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5642,8}{20 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,14 \quad \text{ou} \quad \mu = \nu \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{3,63}{20} = 0,14$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \rightarrow \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,40$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5594,4}{70 \cdot 1400 \frac{2,0}{1,4}} = 0,04 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{3,60}{70} = 0,04$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{70} = 0,06 \cong 0,05 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-24: } \omega = 0,08$$

A armadura final, como esperado, é resultante da 1ª s.c., com a maior taxa de armadura:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,40 \cdot 1400 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 18,40 \text{ cm}^2$$

No detalhamento da armadura longitudinal do pilar deve-se tomar cuidado de posicionar as barras de aço de acordo com o arranjo de barras do ábaco escolhido, A-4 neste caso.

e2) Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

O momento fletor total na direção x é:

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1554 - 48,4^2 \cdot 20 \cdot 1554 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3263,4) M_{d,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1554 \cdot 3263,4 = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 - 16116845 M_{d,tot} - 3894776524,80 = 0$$

$$M_{d,tot}^2 - 839,4 M_{d,tot} - 20285294 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é:

$$M_{d,tot,x} = 4.943,1 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,x} = 3.263,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Com $v = 0,78$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4943,1}{20 \cdot 1400 \frac{2,0}{1,4}} = 0,12$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \text{Ábaco A-4} \quad (\omega = 0,33)$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,33 \cdot 1400 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 15,18 \text{ cm}^2$$

16.2.2 Exemplo 2

Este exemplo é também semelhante àquele encontrado em FUSCO (1981, p. 311), com a diferença da alteração do concreto, de C15 para C20, e da largura do pilar, de 25 cm para 20 cm (Figura 45). São conhecidos:

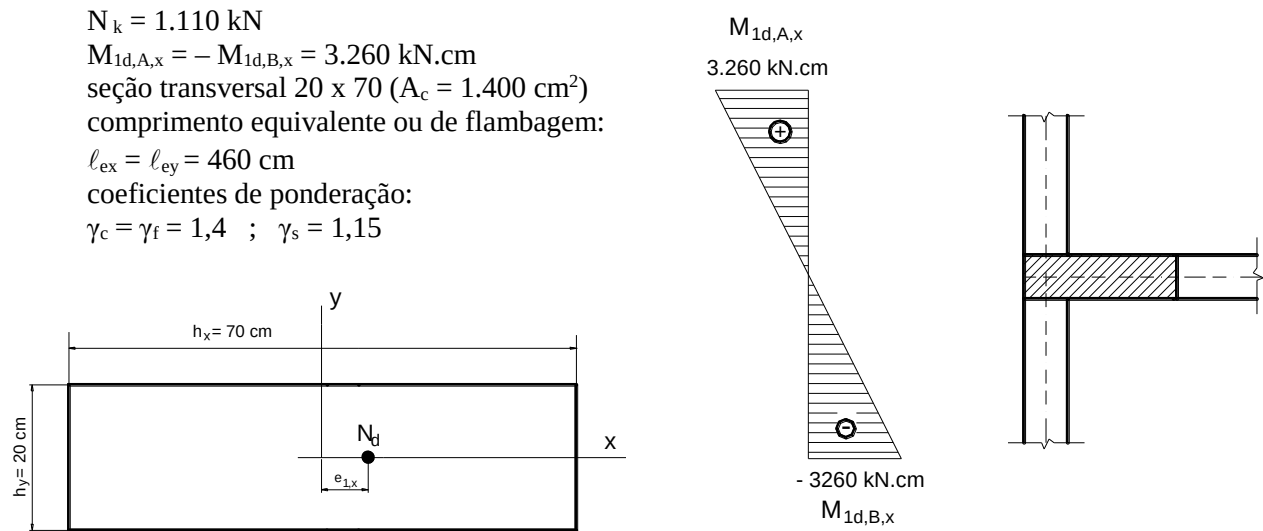


Figura 45 – Dimensões da seção transversal, arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma e momentos fletores de primeira ordem na direção x.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 1110 = 1.554 \text{ kN}$, com γ_n da Tabela 4.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores nas extremidades (topo e base) do pilar ($M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 3.260 \text{ kN.cm}$), que solicitam o pilar na direção x, em função de existir uma viga não contínua sobre o pilar na direção x (Figura 46). Este momento fletor, ou seja, todas as ações aplicadas no pilar, devem ser majoradas por γ_n , igual a 1,0 neste caso.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 460}{70} = 22,7$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 460}{20} = 79,6$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,\min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção, é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\min,x} = 1554 (1,5 + 0,03 \cdot 70) = 5.594,4 \text{ kN.cm} ; e_{1x,\min} = \frac{5594,4}{1554} = 3,60 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\min,y} = 1554 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 3.263,4 \text{ kN.cm} ; e_{1y,\min} = \frac{3263,4}{1554} = 2,10 \text{ cm}$$

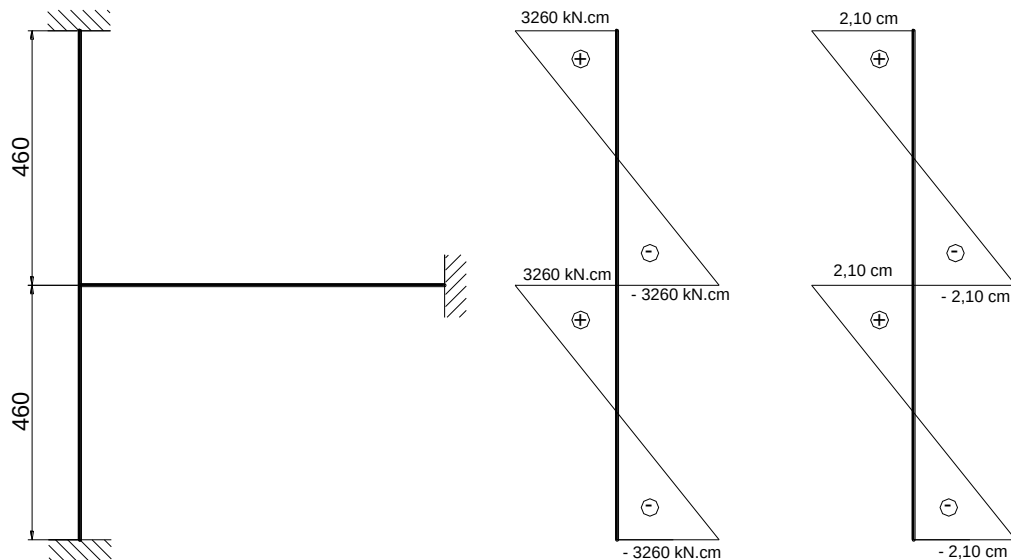


Figura 46 – Momentos fletores de cálculo de 1ª ordem e excentricidades no topo e na base do pilar, na direção x.

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem na direção x (e_{1x}) é 2,10 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem na direção x ($M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 3.260 \text{ kN.cm}$) são menores que o momento fletor mínimo nesta direção ($M_{1d,\min,x} = 5.594,4 \text{ kN.cm}$), o que leva a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{2,10}{70}}{1,0} = 25,4 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: Na direção y não ocorrem momentos e excentricidades de 1ª ordem, portanto $e_{1y} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{20}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 22,7 < \lambda_{1,x} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 79,6 > \lambda_{1,y} \rightarrow$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

e) Momento de 2ª ordem

O momento de 2ª ordem será avaliado pelos métodos do pilar-padrão com curvatura aproximada e do pilar-padrão com rigidez κ aproximada.

e1) Método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,\min} \end{cases}, \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

A força normal adimensional e a curvatura (na direção y, sujeita a momentos fletores de 2ª ordem) são os mesmos do exemplo anterior: $v = 0,78$ e $1/r = 1,953 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$.

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção y é:

$$e_{2y} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{460^2}{10} 1,953 \cdot 10^{-4} = 4,13 \text{ cm}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,\text{mín}}$ em cada direção, tem-se o momento fletor total máximo:

Dir. x:

$$M_{d,\text{tot},x} = 3.260,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\text{mín},x} = 5.594,4 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{d,\text{tot},x} = 5.594,4 \text{ kN.cm}$$

Dir. y:

$$M_{d,\text{tot},y} = 1,0 \cdot 3.263,4 + 1554 \frac{460^2}{10} 1,953 \cdot 10^{-4} = 9.685,4 \geq M_{1d,\text{mín},y} = 3.263,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},y} = 9.685,4 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 47. As situações de projeto e de cálculo estão mostradas na Figura 48 (seções de extremidade) e Figura 49 (seção intermediária C).

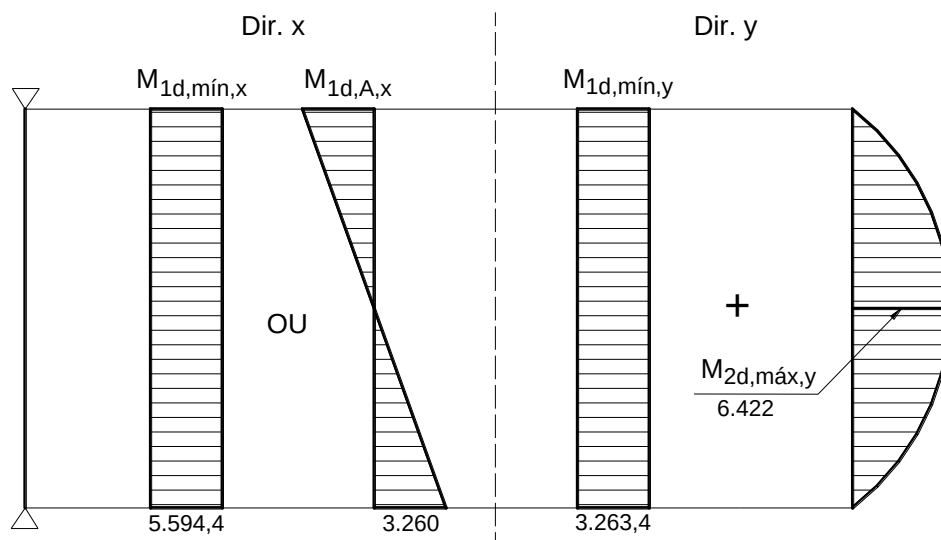


Figura 47 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

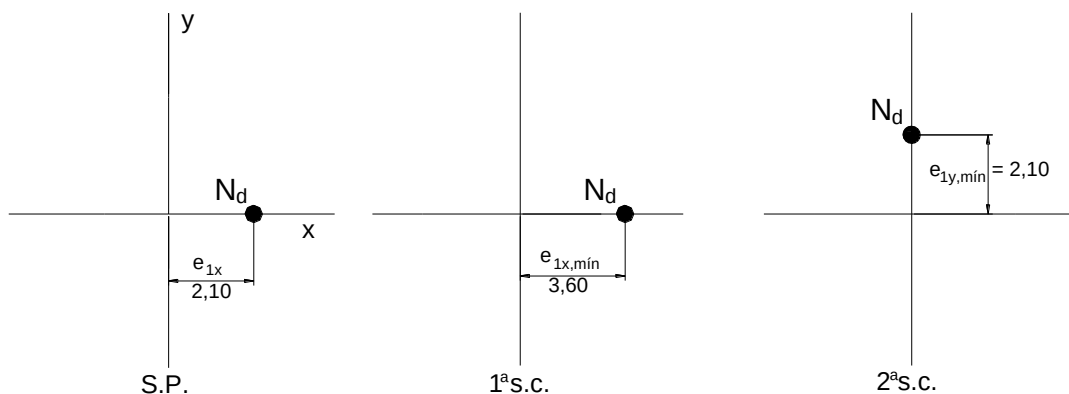


Figura 48 – Situação de projeto e situações de cálculo nas seções de extremidade (topo e base do pilar).

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial (e_{1x}), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 2,10 + 0,4 \cdot (-2,10) = 0,60 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 2,10 = 0,84 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 0,84 \text{ cm}$$

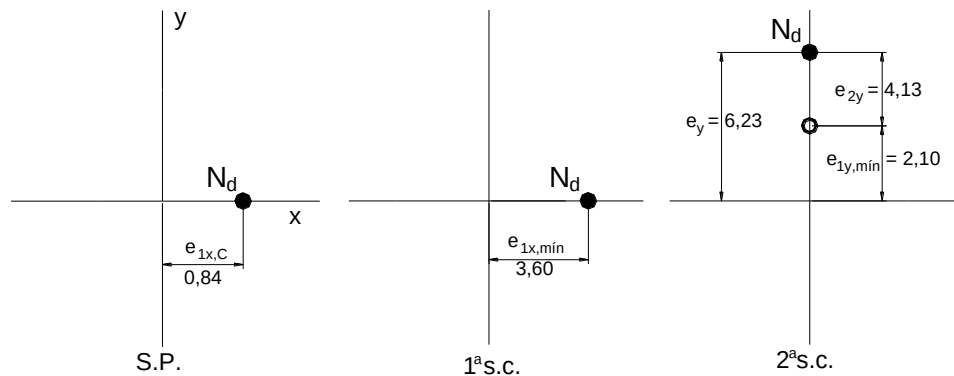


Figura 49 – Situações de projeto e de cálculo da seção intermediária.

Na análise das situações de cálculo fica claro que a 2ª s.c. da seção intermediária C é que resultará na maior armadura longitudinal do pilar, porque tem o maior valor de excentricidade, na direção de menor rigidez do pilar. A título de exemplo são verificadas as duas situações da seção intermediária.

Com $v = 0,78$ e utilizando-se os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{5594,4}{70 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,04 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,78 \frac{3,60}{70} = 0,04$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{70} = 0,06 \cong 0,05 \rightarrow \text{Ábaco A-24: } \omega = 0,08$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{9685,4}{20 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,24 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,78 \frac{6,23}{20} = 0,24$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \rightarrow \text{Ábaco A-4: } \omega = 0,79$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,79 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 36,34 \text{ cm}^2$$

e2) Método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada

O momento fletor total na direção y, sujeita a momentos de 2ª ordem, é:

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 h N_d - \lambda^2 h N_d - 19200 \alpha_b M_{1d,A}) M_{d,tot} - 3840 \alpha_b h N_d M_{1d,A} = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 + (3840 \cdot 20 \cdot 1554 - 79,6^2 \cdot 20 \cdot 1554 - 19200 \cdot 1,0 \cdot 3263,4) M_{d,tot} - 3840 \cdot 1,0 \cdot 20 \cdot 1554 \cdot 3263,4 = 0$$

$$19200 M_{d,tot}^2 - 140237933 M_{d,tot} - 389477652480 = 0$$

$$M_{d,tot}^2 - 7304,1 M_{d,tot} - 20285294 = 0$$

A raiz positiva da equação de 2º grau é:

$$M_{d,tot} = 9.450,6 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,min,y} = 3.263,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Com $\nu = 0,78$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{9450,6}{20 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,24$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \text{Ábaco A-4} \quad (\omega = 0,79)$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,79 \cdot 1400 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 36,34 \text{ cm}^2$$

16.2.3 Exemplo 3

São conhecidos (Figura 50):

$$N_k = 500 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,y} = M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$$

$$(e_{1y,A} = e_{1y,B} = 10,0 \text{ cm})$$

$$\text{seção } 20 \times 40 (A_c = 800 \text{ cm}^2)$$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4 \quad ; \quad \gamma_s = 1,15$$

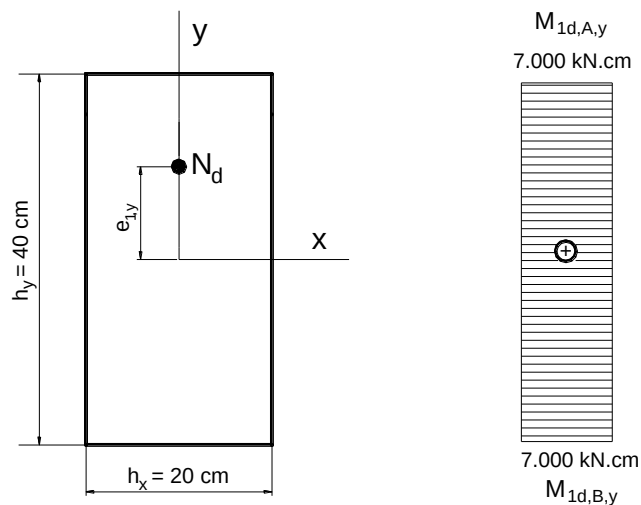


Figura 50 – Dimensões da seção transversal e momentos fletores de 1ª ordem na direção y.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 500 = 700 \text{ kN}$, (γ_n na Tabela 4). Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores nas seções de topo e base do pilar ($M_{1d,A,y} = M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$), que solicitam o pilar na direção y (Figura 50).

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{40} = 24,2$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. Assim, o momento mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 700 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 1.470,0 \text{ kN.cm} ; e_{1x,min} = \frac{1470,0}{700} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 700 (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 1.890,0 \text{ kN.cm} ; e_{1y,min} = \frac{1890,0}{700} = 2,70 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: Nesta direção não ocorrem momentos e excentricidades de 1ª ordem, portanto $e_{1x} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{20}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem nesta direção (e_{1y}) é 10,0 cm, e os momentos fletores de 1ª ordem são $M_{1d,A,y} = M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo nesta direção ($M_{1d,min,y} = 1.890,0 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b e de $\lambda_{1,y}$:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{7000}{7000} = 1,0$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{10,0}{40}}{1,0} = 28,1 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 48,4 > \lambda_{1,x} \rightarrow$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

e) Momento de 2ª ordem pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} , \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

$$\text{Força normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{700}{800 \frac{2,0}{1,4}} = 0,61$$

Dir. x:

Curvatura na direção x sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{20(0,61 + 0,5)} = 0,0002252 \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 0,00025 \text{ cm}^{-1}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção x é:

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{280^2}{10} 0,0002252 = 1,77 \text{ cm}$$

$$M_{d,tot,x} = 1,0 \cdot 1470,0 + 700 \frac{280^2}{10} 0,0002252 = 2.705,9 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 1.470,0 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,tot,x} = 2.705,9 \text{ kN.cm}$$

Dir. y: Nesta direção o pilar deve ser dimensionado para o máximo momento fletor que ocorre nas extremidades do topo e da base, sem se acrescentar o momento mínimo.

$$M_{d,tot,y} = 7.000,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 1.890,0 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 51. A situação de projeto e as situações de cálculo estão mostradas na Figura 52 e Figura 53.

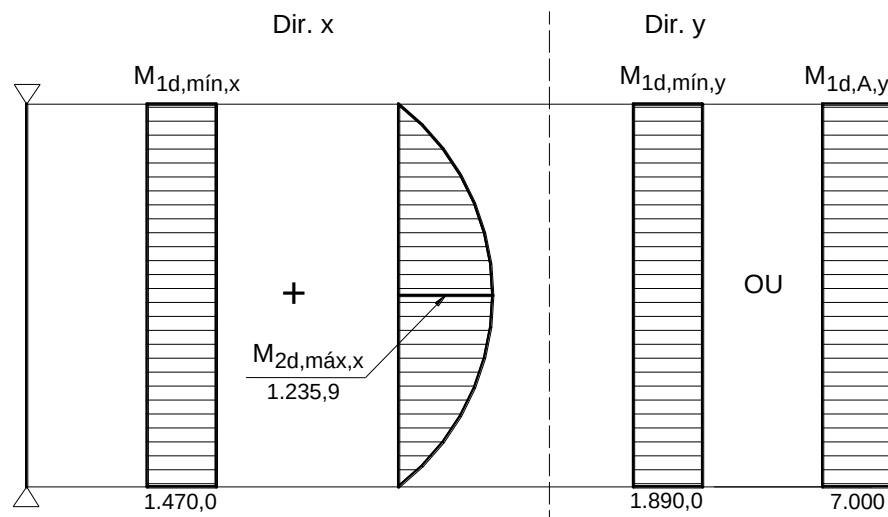


Figura 51 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

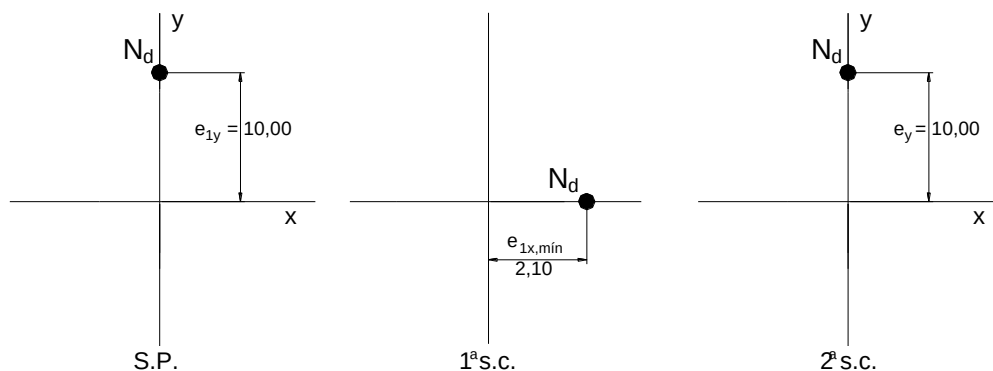


Figura 52 – Situação de projeto e situações de cálculo da seção de extremidade (base e topo do pilar).

A direção crítica do pilar é a direção x, correspondente à largura do pilar de seção retangular. Geralmente é a direção que proporciona a armadura final do pilar, no entanto, neste caso, na direção y (relativa ao comprimento do pilar) ocorre uma excentricidade com valor significativo ($e_y = 10,00 \text{ cm}$), e

que pode resultar na armadura final. O cálculo das armaduras para a 1ª e 2ª s.c. é que vai indicar a armadura maior, a ser aplicada no pilar.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial (e_{1y}), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 10,00 + 0,4 \cdot 10,00 = 10,00 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 10,00 = 4,00 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 10,00 \text{ cm}$$

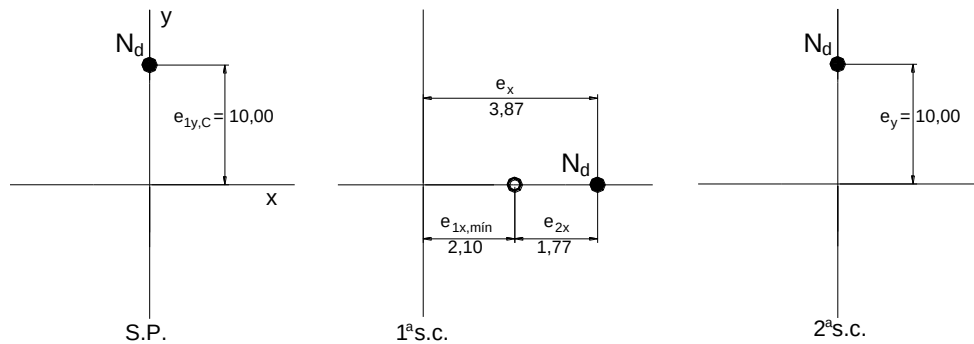


Figura 53 – Situações de projeto e de cálculo da seção intermediária.

Com $v = 0,61$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para flexão reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2705,9}{20 \cdot 800 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,12 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,61 \frac{3,87}{20} = 0,12$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-29: } \omega = 0,20$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{7000,0}{40 \cdot 800 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,15 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,61 \frac{10,00}{40} = 0,15$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{40} = 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-27: } \omega = 0,28$$

A armadura final resulta da maior taxa de armadura ($\omega = 0,28$), relativa à 2ª s.c., com excentricidade na direção do comprimento do pilar.

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,28 \cdot 800 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 7,36 \text{ cm}^2$$

16.2.4 Exemplo 4

Este exemplo é igual ao anterior, com a diferença do momento fletor que agora não é constante ao longo da altura do pilar, como mostrado na Figura 54. São conhecidos:

$$N_k = 500 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$$

$$(e_{1y,A} = -e_{1y,B} = 10,0 \text{ cm})$$

$$\text{seção } 20 \times 40 \text{ (} A_c = 800 \text{ cm}^2 \text{)}$$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4 \quad ; \quad \gamma_s = 1,15$$

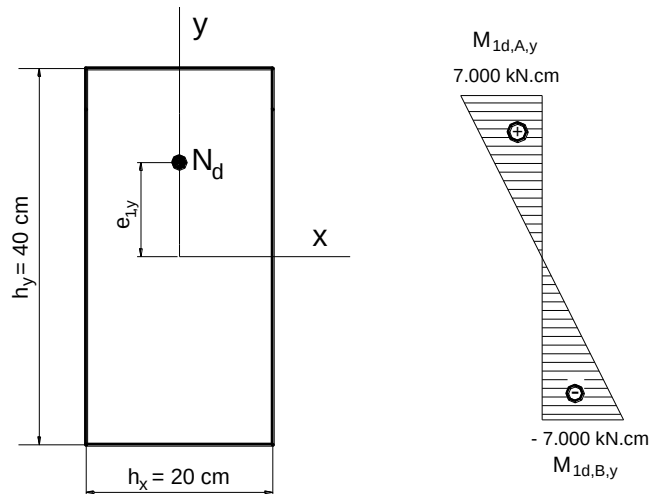


Figura 54 – Dimensões da seção transversal e momentos fletores de 1ª ordem na direção y.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 500 = 700 \text{ kN}$, com γ_n da Tabela 4.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores na base e topo do pilar ($M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$), que solicitam o pilar na direção y (Figura 54).

b) Índice de esbeltez

Como calculados no exemplo anterior: $\lambda_x = 48,4$ e $\lambda_y = 24,2$

c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\min,x} = 700 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 1.470,0 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1x,\min} = \frac{1470,0}{700} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\min,y} = 700 (1,5 + 0,03 \cdot 40) = 1.890,0 \text{ kN.cm} \quad ; \quad e_{1y,\min} = \frac{1890,0}{700} = 2,70 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: Nesta direção não ocorrem momentos e excentricidades de 1ª ordem, portanto $e_{1x} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{20}}{1,0} = 25,0 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: As excentricidades de 1ª ordem nesta direção são $e_{1y,A} = 10,0 \text{ cm}$ e $e_{1y,B} = -10,0 \text{ cm}$. Os momentos fletores de 1ª ordem são $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 7.000 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo nesta direção ($M_{1d,\min,y} = 1.890,0 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b e de $\lambda_{1,y}$:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-7000)}{7000} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{10,0}{40}}{0,4} = 70,3 \geq 35 \quad \rightarrow \lambda_{1,y} = 70,3$$

Desse modo:

$\lambda_x = 48,4 > \lambda_{1,x} \rightarrow$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 24,2 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

e) Momento de 2ª ordem pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,mín} \end{cases}, \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,mín}$$

Como no exemplo anterior, a força normal adimensional é $v = 0,61$ e a curvatura $1/r$ na direção x é $0,0002252 \text{ cm}^{-1}$.

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção x é:

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{280^2}{10} 0,0002252 = 1,77 \text{ cm}$$

Dir. x:

$$M_{d,tot,x} = 1,0 \cdot 1470,0 + 700 \frac{280^2}{10} 0,0002252 = 2.705,9 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 1.470,0 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow$$

ok!

$$\therefore M_{d,tot,x} = 2.705,9 \text{ kN.cm}$$

Dir. y: Nesta direção o pilar deve ser dimensionado para o máximo momento fletor que ocorre nas extremidades do topo e da base, sem se acrescentar o momento fletor mínimo.

$$M_{d,tot,y} = 7.000,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 1.890,0 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \text{ ok!}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 55. A situação de projeto e as situações de cálculo estão mostradas na Figura 56 e Figura 57.

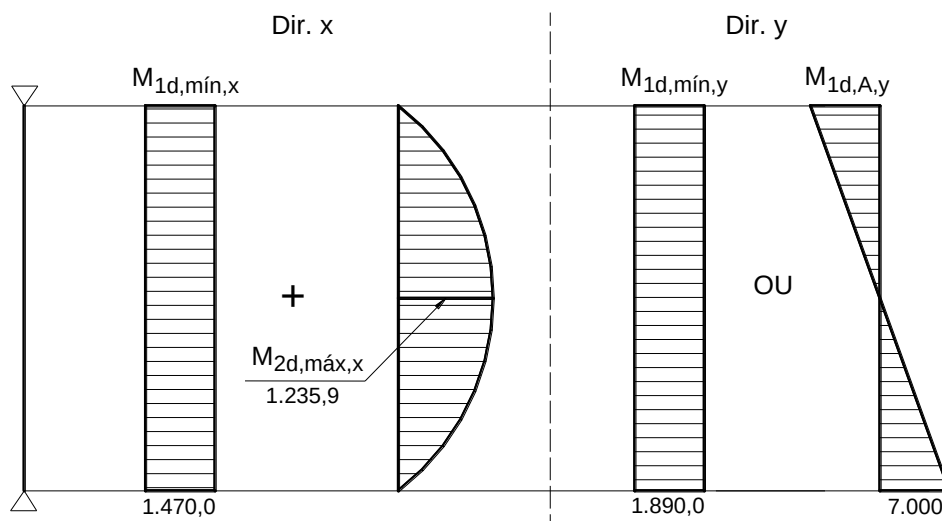


Figura 55 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

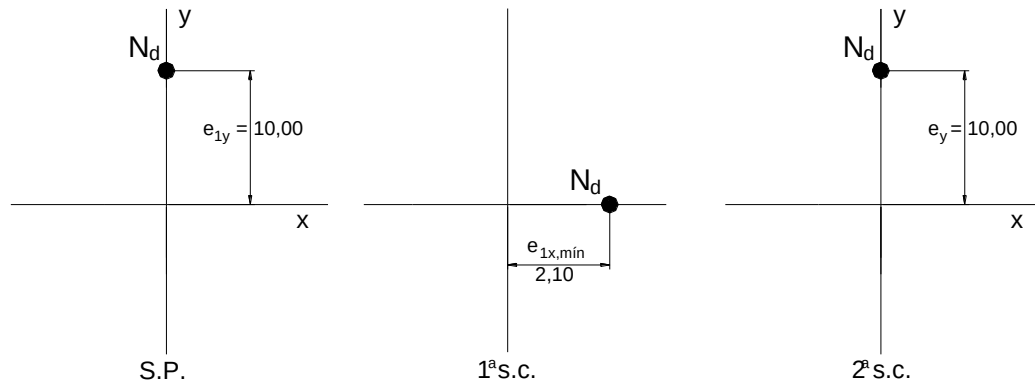


Figura 56 – Situação de projeto e situação de cálculo da seção de extremidade.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial (e_{1y}), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 10,00 + 0,4 \cdot (-10,00) = 2,00 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 10,00 = 4,00 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 4,00 \text{ cm}$$

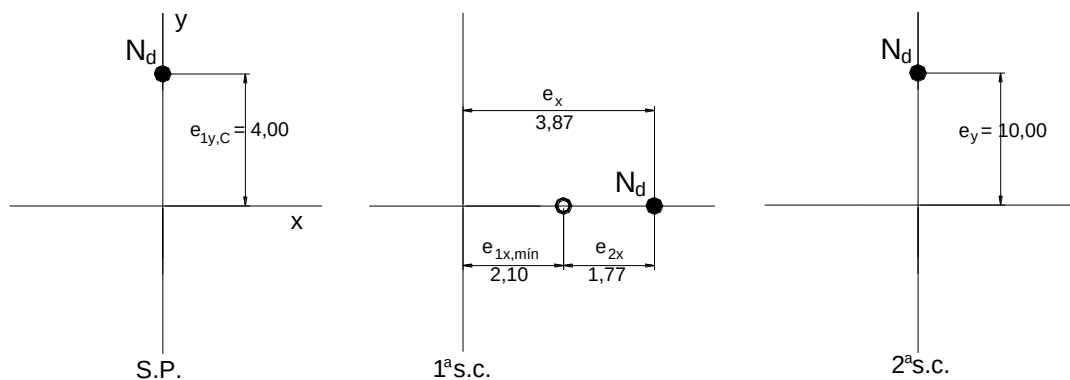


Figura 57 – Situações de projeto e de cálculo da seção intermediária.

De modo semelhante ao exemplo anterior, com $v = 0,61$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para flexão reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2705,9}{20 \cdot 800 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,12 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,61 \frac{3,87}{20} = 0,12$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20 \rightarrow \text{Ábaco A-29: } \omega = 0,20$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{7000,0}{40 \cdot 800 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,15 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,61 \frac{10,00}{40} = 0,15$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{40} = 0,10 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-27: } \omega = 0,28$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,28 \cdot 800 \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 7,36 \text{ cm}^2$$

Observa-se que a área de armadura longitudinal não se modificou em relação à calculada no exemplo anterior, embora a alteração dos momentos fletores de 1ª ordem.

17 CÁLCULO DOS PILARES DE CANTO

Apresenta-se a seguir um roteiro de cálculo para os chamados pilares de canto, com a aplicação do “Método do pilar-padrão com curvatura aproximada”. Outros métodos de cálculo constantes da norma não são apresentados neste trabalho. Três exemplos numéricos de aplicação são apresentados.

17.1 Roteiro de Cálculo

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo pode ser determinada como $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k$

onde: N_k = força normal característica no pilar;

γ_n = coeficiente de majoração da força normal (Tabela 4);

γ_f = coeficiente de ponderação das ações no ELU (definido na Tabela 11.1 da NBR 6118).

b) Índice de esbeltez (Eq. 29 e Eq. 30)

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \quad ; \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \rightarrow \quad \text{para seção retangular: } \lambda = \frac{3,46 \ell_e}{h}$$

c) Momento fletor mínimo (Eq. 34)

$M_{1d,\min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h = dimensão do pilar, em cm, na direção considerada.

d) Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

$e_1 \neq 0$ na direção da viga não contínua sobre o pilar de extremidade;

h = dimensão do pilar na mesma direção de e_1 ;

$\lambda \leq \lambda_1$ - não se considera o efeito local de 2ª ordem para a direção considerada;

$\lambda > \lambda_1$ - se considera o efeito local de 2ª ordem para a direção considerada.

e) Momento fletor total

Determina-se $M_{d,\text{tot}}$ com a Eq. 33:

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,\min} \end{cases} \quad , \quad M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

17.2 Exemplos Numéricos

Os exemplos numéricos a seguir são de pilares de canto, biapoiados na base e no topo, de nós fixos (contraventados) e sem forças transversais atuantes. Os seguintes dados são comuns em todos os exemplos: concreto C20 ; aço CA-50 ; $d' = 4,0$ cm ; coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$.

17.2.1 Exemplo 1

Este exemplo é semelhante àquele encontrado em FUSCO (1981, p. 313), com a diferença da alteração do concreto, de C15 para C20, e da largura do pilar, de 25 cm para 20 cm (Figura 58). São conhecidos:

$$N_k = 820 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm} (e_{1x,A} = -e_{1x,B} = 1,78 \text{ cm})$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.726 \text{ kN.cm} (e_{1y,A} = -e_{1y,B} = 1,50 \text{ cm})$$

seção transversal 20 x 50 ($A_c = 1.000 \text{ cm}^2$)

comprimento equivalente: $\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$



Figura 58 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma, dimensões da seção transversal e posição do ponto de aplicação da força normal N_d .

A Figura 59 mostra como ocorre a sollicitação do pilar pelos momentos fletores de 1ª ordem, e as excentricidades correspondentes.

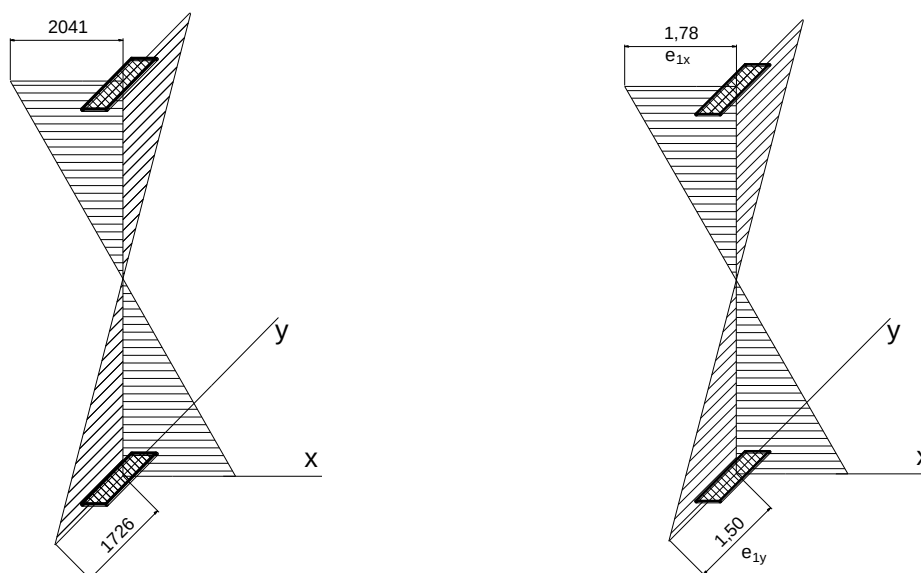


Figura 59 – Momentos fletores de 1ª ordem de cálculo (kN.cm) e excentricidades nas direções x e y do pilar.

RESOLUÇÃO

a) Esforços sollicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 820 = 1.148 \text{ kN}$.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores na base e no topo do pilar, $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$ na direção x, e $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.726 \text{ kN.cm}$ na direção y (Figura 59), em função de existirem duas vigas não contínuas sobre o pilar, nas direções x e y.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 1148 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2.410,8 \text{ kN.cm} ; e_{1x,min} = \frac{2410,8}{1148} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 1148 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.444,0 \text{ kN.cm} ; e_{1y,min} = \frac{3444,0}{1148} = 3,00 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 1,78 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,x} = - M_{1d,B,x} = 2.041 \text{ kN.cm}$, menores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,x} = 2.410,8 \text{ kN.cm}$), o que leva a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,78}{20}}{1,0} = 26,1 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção y é 1,50 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,y} = - M_{1d,B,y} = 1.726 \text{ kN.cm}$, menores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$), o que leva também a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,50}{50}}{1,0} = 25,4 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 48,4 > \lambda_{1,x}$ → são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ;

$\lambda_y = 19,4 < \lambda_{1,y}$ → não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y .

e) Momento de 2ª ordem pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} , \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

$$\text{Força normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1148}{1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,80$$

Curvatura na direção x sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,50)} = \frac{0,005}{20(0,80+0,5)} = 1,923 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade máxima de 2ª ordem na direção x é:

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{280^2}{10} 1,923 \cdot 10^{-4} = 1,51 \text{ cm}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$ em cada direção, tem-se o momento fletor total:

Dir. x: ($M_{1d,A,x} = 2.041 \text{ kN.cm} < M_{1d,\min,x} = 2.410,8 \text{ kN.cm}$)

$$M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 2410,8 + 1148 \frac{280^2}{10} 0,0001923 = 4.141,6 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,x} = 2.410,8 \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},x} = 4.141,6 \text{ kN.cm}$$

Dir. y: ($M_{1d,A,y} = 1.726 \text{ kN.cm} < M_{1d,\min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$)

$$M_{d,\text{tot},y} = 1.726,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{d,\text{tot},y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 60. A situação de projeto e as situações de cálculo estão mostradas na Figura 61 e Figura 62.

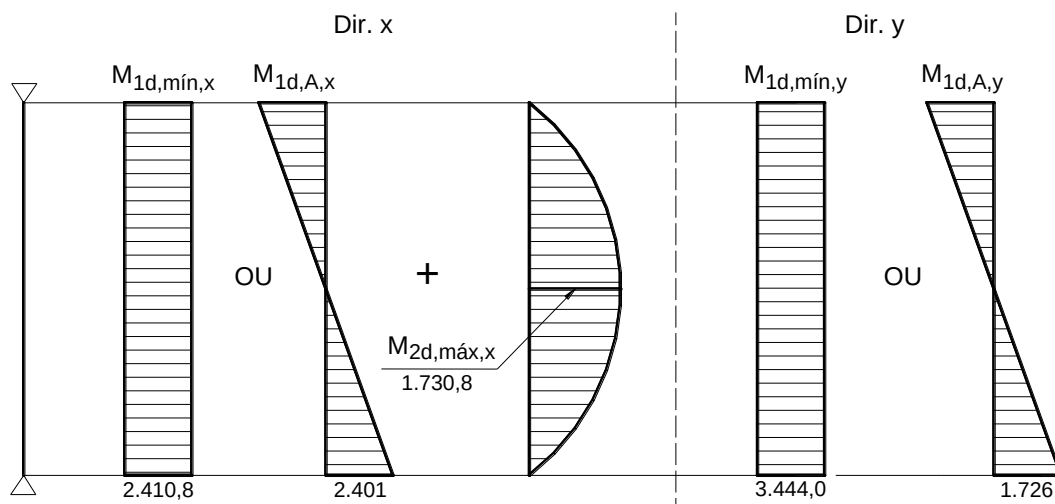


Figura 60 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

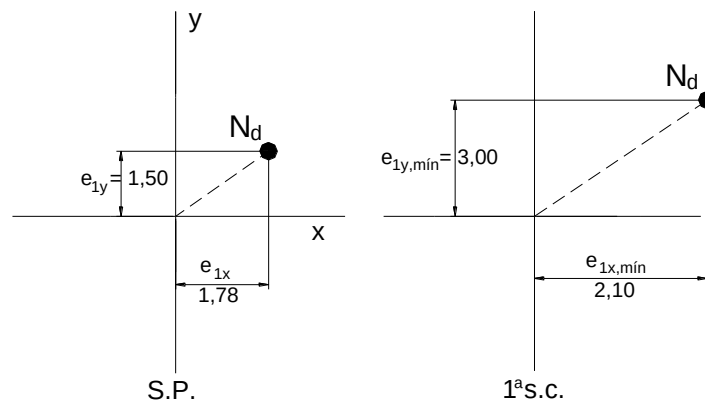


Figura 61 – Situações de projeto e de cálculo da seção de extremidade.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial em cada direção (e_1), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 1,78 + 0,4 \cdot (-1,78) = 0,36 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 1,78 = 0,71 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 0,71 \text{ cm}$$

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 1,50 + 0,4 \cdot (-1,50) = 0,30 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 1,50 = 0,60 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 0,60 \text{ cm}$$

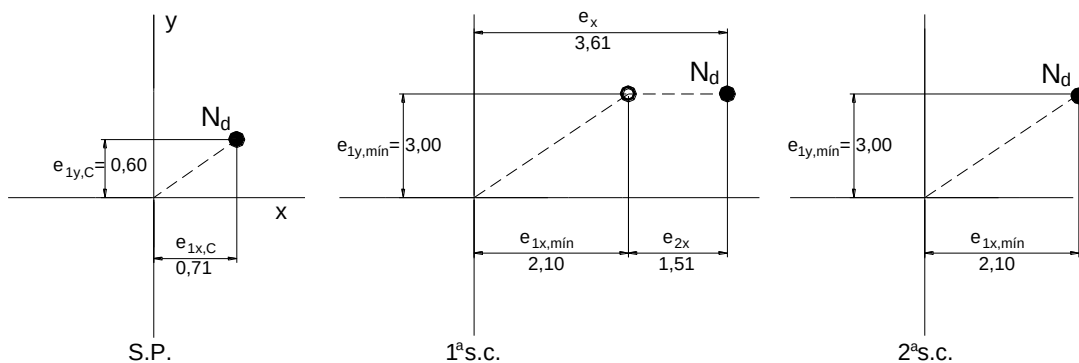


Figura 62 – Situação de projeto e situações de cálculo da seção intermediária.

Nota-se que entre as três situações de cálculo, é a 1ª s.c. da seção intermediária que resultará na maior armadura. Os coeficientes adimensionais da Flexão Composta Oblíqua são:

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4141,6}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,14 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,80 \frac{3,61}{20} = 0,14$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3444,0}{50 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,05 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,80 \frac{3,00}{50} = 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{50} = 0,08 \cong 0,10$$

Com $v = 0,80$ e utilizando o ábaco A-50 de PINHEIRO (1994)¹¹, a taxa de armadura resulta $\omega = 0,50$, e:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,50 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 16,43 \text{ cm}^2$$

17.2.2 Exemplo 2

Este exemplo é semelhante aquele encontrado em FUSCO (1981, p. 321), com a diferença da alteração do concreto, de C15 para C20, e da largura do pilar, de 25 cm para 20 cm (Figura 63). São conhecidos:

¹¹ Os ábacos podem ser encontrados em: http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

$$N_k = 820 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1.423 \text{ kN.cm} \quad (e_{1x,A} = -e_{1x,B} = 1,24 \text{ cm})$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.509 \text{ kN.cm} \quad (e_{1y,A} = -e_{1y,B} = 1,31 \text{ cm})$$

$$\text{seção } 20 \times 50 \text{ (} A_c = 1.000 \text{ cm}^2 \text{)}$$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 460 \text{ cm}$$

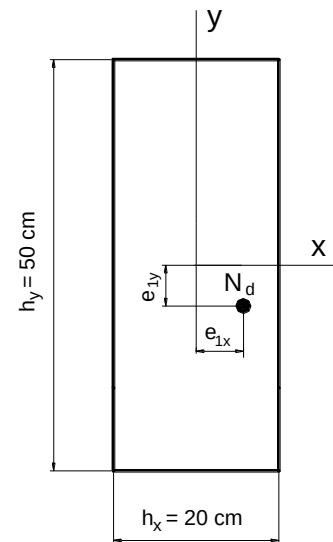
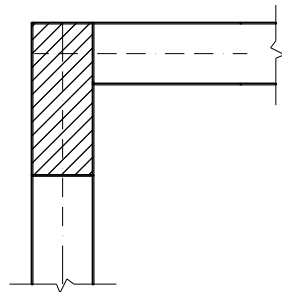


Figura 63 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma e dimensões da seção transversal.

A Figura 64 mostra como ocorre a sollicitação do pilar pelos momentos fletores de 1ª ordem, e as excentricidades correspondentes.

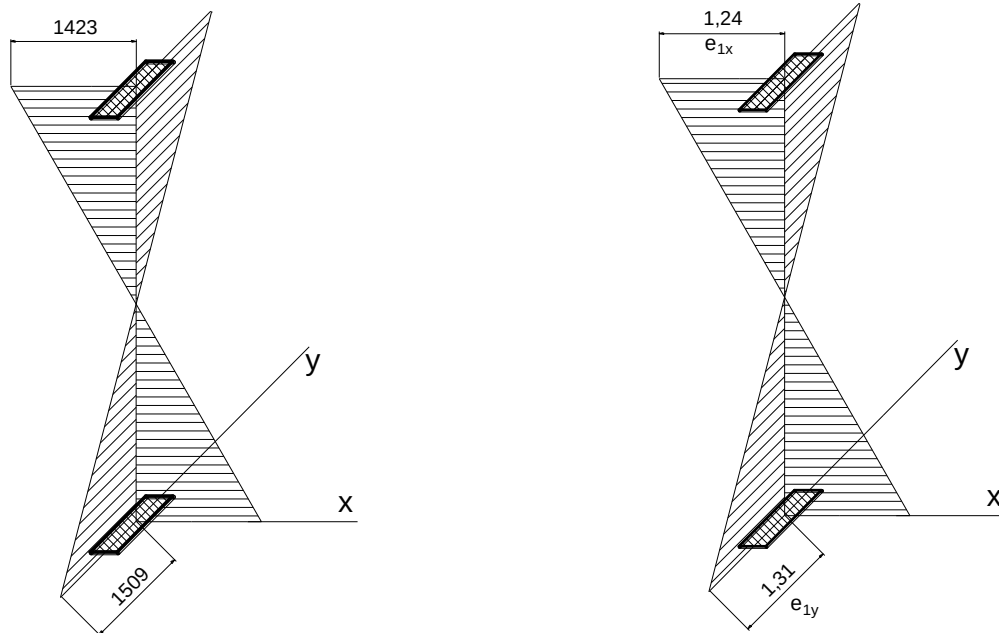


Figura 64 – Momentos fletores de 1ª ordem de cálculo (kN.cm) nas direções x e y.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 820 = 1.148 \text{ kN}$, com γ_n na Tabela 4.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores na base e topo do pilar, $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1.423 \text{ kN.cm}$ na direção x, e $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.509 \text{ kN.cm}$ na direção y (Figura 64), em função de existirem duas vigas não contínuas sobre o pilar, nas direções x e y.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 460}{20} = 79,6$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 460}{50} = 31,8$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 1148 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 2.410,8 \text{ kN.cm} ; e_{1x,min} = \frac{2410,8}{1148} = 2,10 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 1148 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.444,0 \text{ kN.cm} ; e_{1y,min} = \frac{3444,0}{1148} = 3,00 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 1,24 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1.423 \text{ kN.cm}$, menores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,x} = 2.410,8 \text{ kN.cm}$), o que leva a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,24}{20}}{1,0} = 25,8 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção y é 1,31 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.509 \text{ kN.cm}$, menores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$), o que leva também a $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{1,31}{50}}{1,0} = 25,4 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 79,6 > \lambda_{1,x} \rightarrow$ são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ;

$\lambda_y = 31,8 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y .

e) Momento de 2ª ordem pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} , \text{ e } M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

$$\text{Força normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1148}{1000 \frac{2,0}{1,4}} = 0,80$$

Curvatura segundo a direção x sujeita a esforços de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{20(0,80 + 0,5)} = 1,923 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{20} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

A excentricidade de 2ª ordem na direção x é:

$$e_{2x} = \frac{\ell_e^2}{10} \frac{1}{r} = \frac{460^2}{10} 1,923 \cdot 10^{-4} = 4,07 \text{ cm}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$ em cada direção, tem-se o momento total máximo:

Dir. x: ($M_{1d,A,x} = 1.423 \text{ kN.cm} < M_{1d,\min,x} = 2.410,8 \text{ kN.cm}$)

$$M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 2.410,8 + 1148 \frac{460^2}{10} 1,923 \cdot 10^{-4} = 7.082,1 \geq M_{1d,\min,x} = 2.410,8 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},x} = 7.082,1 \text{ kN.cm}$$

Dir. y: ($M_{1d,A,y} = 1.509 \text{ kN.cm} < M_{1d,\min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$)

$$M_{d,\text{tot},y} = 1.509,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,y} = 3.444,0 \text{ kN.cm} \rightarrow M_{d,\text{tot},y} = 3.444,0 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 65. A situação de projeto e as situações de cálculo estão mostradas na Figura 66 e Figura 67.

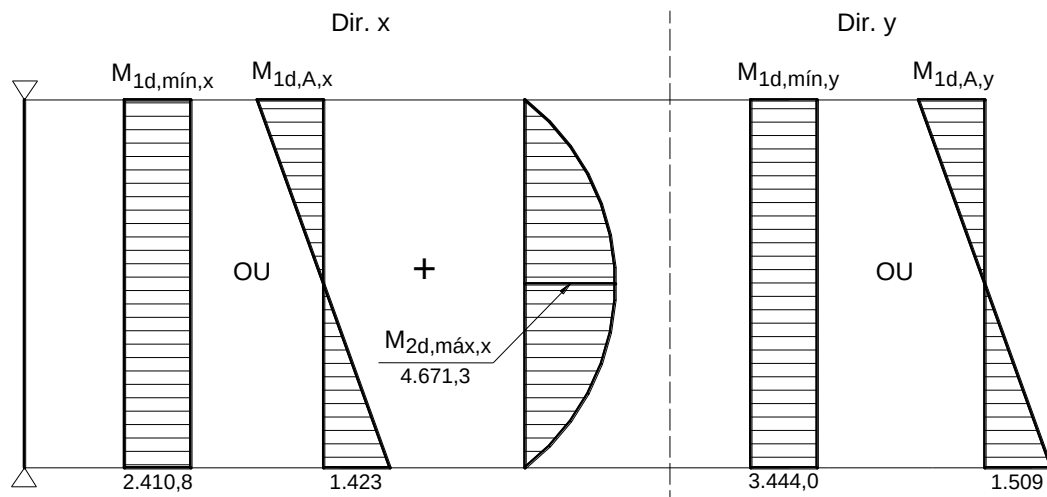


Figura 65 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

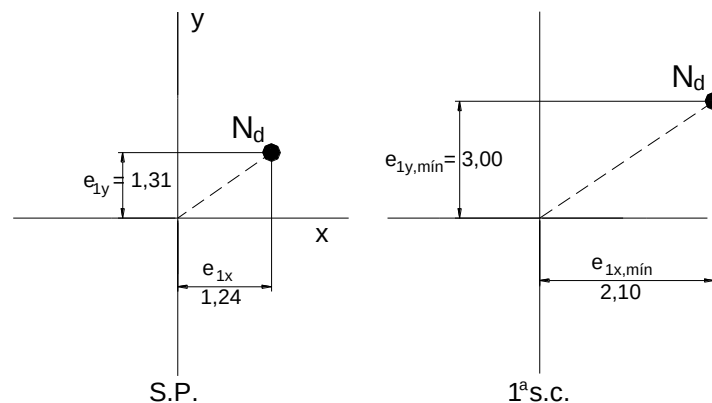


Figura 66 – Situação de projeto e situação de cálculo da seção de extremidade.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial em cada direção (e_1), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 1,24 + 0,4 \cdot (-1,24) = 0,25 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 1,24 = 0,50 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 0,50 \text{ cm}$$

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 1,31 + 0,4 \cdot (-1,31) = 0,26 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 1,31 = 0,52 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 0,52 \text{ cm}$$

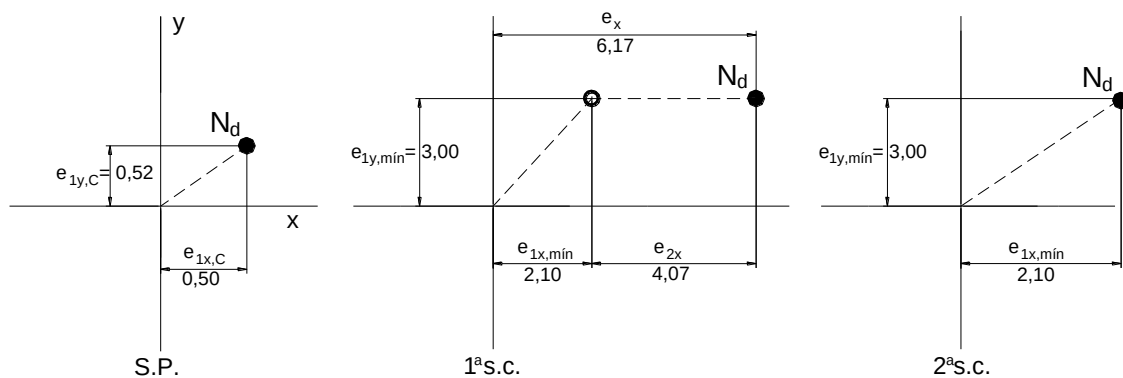


Figura 67 – Situação de projeto e situações de cálculo da seção intermediária.

A análise das situações de cálculo mostra claramente que é a 1ª s.c. da seção intermediária que resultará na armadura final do pilar:

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{7082,1}{20 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,25$$

$$\text{ou } \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,80 \frac{6,17}{20} = 0,25$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3444,0}{50 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,05$$

$$\text{ou } \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,80 \frac{3,00}{50} = 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{50} = 0,08 \cong 0,10$$

Com $v = 0,80$ e utilizando o ábaco A-50 de PINHEIRO (1994) para Flexão Composta Oblíqua, a taxa de armadura resulta $\omega = 0,91$. A armadura é:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,91 \cdot 1000 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 29,90 \text{ cm}^2$$

17.2.3 Exemplo 3

Este exemplo tem momentos fletores de 1ª ordem superiores aos momentos fletores mínimos (Figura 68). São conhecidos:

$$N_k = 360 \text{ kN}$$

$$M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.683 \text{ kN.cm}$$

$$(e_{1x,A} = -e_{1x,B} = 5,32 \text{ cm})$$

$$M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.105 \text{ kN.cm}$$

$$(e_{1y,A} = -e_{1y,B} = 2,19 \text{ cm})$$

$$\text{seção } 20 \times 30 \text{ (} A_c = 600 \text{ cm}^2 \text{)}$$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4 \quad ; \quad \gamma_s = 1,15$$

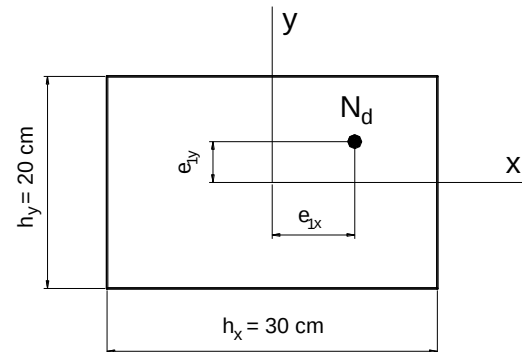
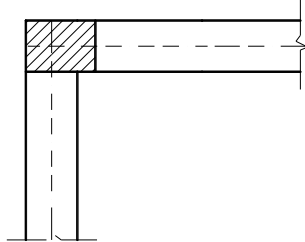


Figura 68 – Arranjo estrutural do pilar na planta de fôrma e dimensões da seção transversal.

A Figura 69 mostra como ocorre a solicitação do pilar pelos momentos fletores de 1ª ordem, e as excentricidades correspondentes.

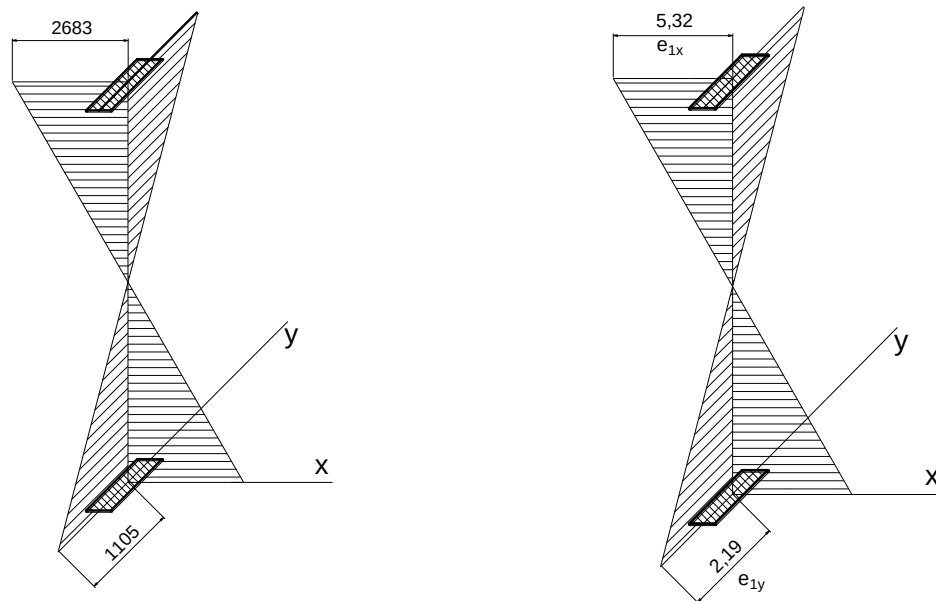


Figura 69 – Momentos fletores de 1ª ordem de cálculo (kN.cm) nas direções x e y.

RESOLUÇÃO

a) Esforços solicitantes

A força normal de cálculo é: $N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,0 \cdot 1,4 \cdot 360 = 504 \text{ kN}$, com γ_n na Tabela 4.

Além da força normal de compressão ocorrem também momentos fletores na base e topo do pilar, $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.683 \text{ kN.cm}$ na direção x, e $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.105 \text{ kN.cm}$ na direção y (Figura 69), em função de existirem duas vigas não contínuas sobre o pilar nas direções x e y.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{30} = 32,3$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{20} = 48,4$$

c) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,min,x} = 504 (1,5 + 0,03 \cdot 30) = 1.209,6 \text{ kN.cm} ; e_{1x,min} = \frac{1209,6}{504} = 2,40 \text{ cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,min,y} = 504 (1,5 + 0,03 \cdot 20) = 1.058,4 \text{ kN.cm} ; e_{1y,min} = \frac{1058,4}{504} = 2,10 \text{ cm}$$

d) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 5,32 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.683 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,x} = 1.209,6 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b . Assim:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} , \text{ com } 0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$$

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{(-2683)}{2683} = 0,2 \rightarrow \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{5,32}{30}}{0,4} = 68,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 68,0$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção y é 2,19 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.105 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,min,y} = 1.058,4 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} , \text{ com } 0,4 \leq \alpha_b \leq 1,0$$

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{(-1105)}{1105} = 0,2 \rightarrow \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{2,19}{20}}{0,4} = 65,9 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 65,9$$

Desse modo:

$\lambda_x = 32,3 < \lambda_{1,x} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x ;

$\lambda_y = 48,4 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y .

e) Momentos fletores totais nas duas direções

Como não ocorrem momentos fletores de 2ª ordem ($M_2 = 0$), os momentos fletores máximos ocorrem nas extremidades do pilar e correspondem aos momentos fletores de 1ª ordem:

Dir. x:

$$M_{d,tot,x} = 2.683,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,x} = 1.209,6 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Dir. y:

$$M_{d,tot,y} = 1.105,0 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 1.058,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 70. A situação de projeto e as situações de cálculo estão mostradas na Figura 71 e Figura 72.

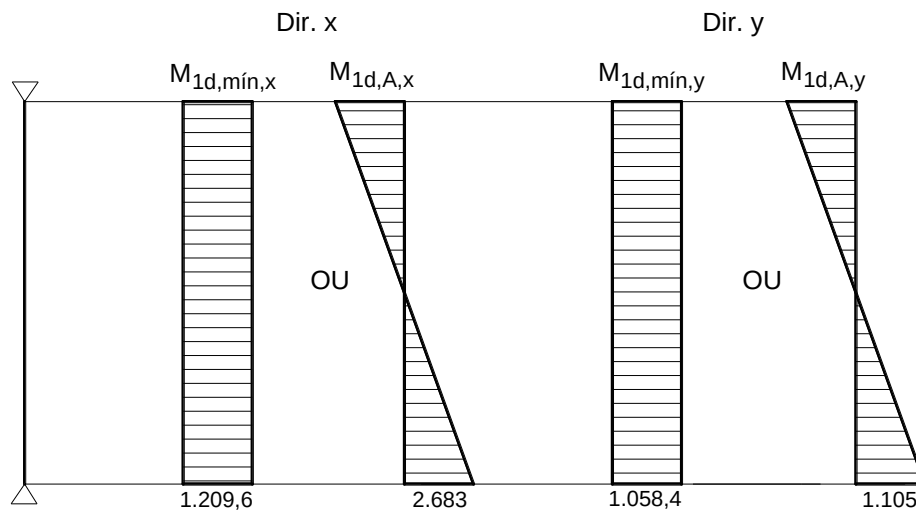


Figura 70 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

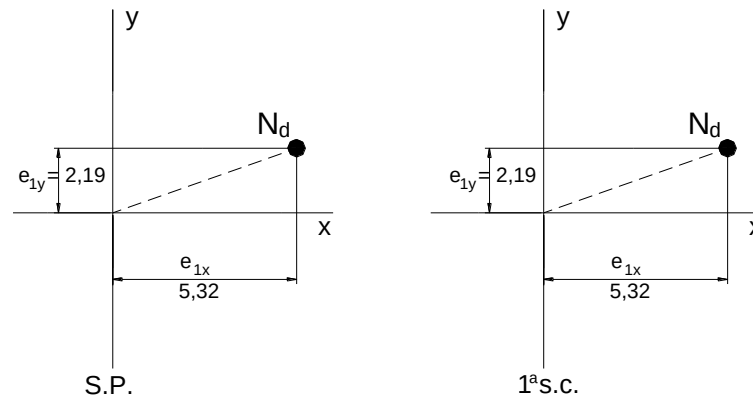


Figura 71 – Situação de projeto e situação de cálculo da seção de extremidade.

A excentricidade inicial na seção intermediária C é calculada com a Eq. 53, que corresponde à Eq. 49, em função da excentricidade inicial em cada direção (e_1), nas extremidades submetidas aos momentos fletores de 1ª ordem ($M_{1d,A}$ e $M_{1d,B}$):

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1x,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1x,A} + 0,4 e_{1x,B} = 0,6 \cdot 5,32 + 0,4 \cdot (-5,32) = 1,06 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1x,A} = 0,4 \cdot 5,32 = 2,13 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1x,C} = 2,13 \text{ cm}$$

$$e_{1C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1A} + 0,4 e_{1B} \\ 0,4 e_{1A} \end{cases} \rightarrow e_{1y,C} \geq \begin{cases} 0,6 e_{1y,A} + 0,4 e_{1y,B} = 0,6 \cdot 2,19 + 0,4 \cdot (-2,19) = 0,44 \text{ cm} \\ 0,4 e_{1y,A} = 0,4 \cdot 2,19 = 0,88 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\therefore e_{1y,C} = 0,88 \text{ cm}$$

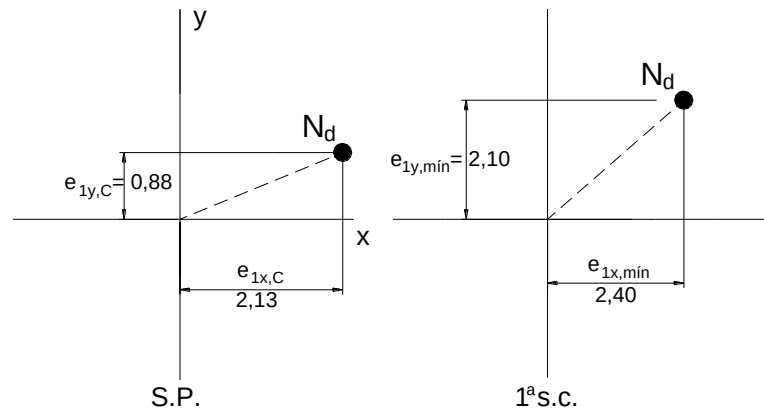


Figura 72 – Situações de projeto e de cálculo da seção intermediária.

Os diagramas de momentos fletores da Figura 70 mostram que nas seções de base e topo do pilar, os momentos fletores maiores são os de 1ª ordem, e na seção intermediária são os momentos fletores mínimos.

Força normal adimensional:
$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{504}{600 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,59$$

Coefficientes adimensionais da flexão considerando a 1ª s.c. da seção de extremidade:

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2683,0}{30 \cdot 600 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,10 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_x}{h_x} = 0,59 \frac{5,32}{30} = 0,10$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1105,0}{20 \cdot 600 \cdot \frac{2,0}{1,4}} = 0,06 \quad \text{ou} \quad \mu = v \frac{e_y}{h_y} = 0,59 \frac{2,19}{20} = 0,06$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{30} = 0,13 \cong 0,15$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{20} = 0,20$$

Com $v = 0,59$ e utilizando o ábaco A-66 de PINHEIRO (1994) para Flexão Composta Oblíqua, a taxa de armadura resulta $\omega = 0,20$. A armadura é:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,20 \cdot 600 \cdot \frac{2,0}{1,4}}{\frac{50}{1,15}} = 3,94 \text{ cm}^2$$

18 DISPOSIÇÕES CONSTRUTIVAS

Segundo a NBR 6118 (18.2.1), “O arranjo das armaduras deve atender não só à sua função estrutural, como também às condições adequadas de execução, particularmente com relação ao lançamento e ao adensamento do concreto. Os espaços devem ser projetados para a introdução do vibrador e de modo a impedir a segregação dos agregados e a ocorrência de vazios no interior do elemento estrutural.” Essas recomendações da norma são gerais, válidas para todos os elementos

estruturais. No caso dos pilares deve-se ter uma atenção especial à região de ligação com as vigas, onde pode existir grande quantidade de barras (verticais nos pilares e horizontais nas vigas), além dos estribos.

18.1 Armadura Longitudinal de Pilares

As disposições relativas à armadura longitudinal dos pilares encontram-se no item 18.4.2 da NBR 6118.

18.1.1 Diâmetro Mínimo

O diâmetro das barras longitudinais (ϕ_ℓ) deve ser:

$$\phi_\ell \begin{cases} \geq 10 \text{ mm} \\ \leq \frac{b}{8} \end{cases} \quad \text{Eq. 61}$$

com **b** sendo a menor dimensão da seção transversal do pilar.

18.1.2 Distribuição Transversal

NBR 6118 (18.4.2.2): “As armaduras longitudinais devem ser dispostas na seção transversal, de forma a garantir a resistência adequada do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro.

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:”

$$e_{\text{mín, livre}} \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_\ell, \phi_{\text{feixe}}, \phi_{\text{luva}} \\ 1,2d_{\text{máx. agreg}} \end{cases} \quad \text{Eq. 62}$$

onde: ϕ_ℓ = diâmetro da barra longitudinal;

$\phi_{\text{feixe}} = \phi_n = \phi\sqrt{n}$, onde n é o número de barras do feixe;

$d_{\text{máx. agreg}}$ = dimensão máxima característica do agregado graúdo (19 mm para brita 1 e 25 mm para brita 2).

“Esses valores se aplicam também às regiões de emendas por traspasse das barras. Quando estiver previsto no plano de concretagem o adensamento através de abertura lateral na face da forma, o espaçamento das armaduras deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador.

O espaçamento máximo entre eixos das barras, ou de centros de feixes de barras, deve ser:

$$e_{\text{máx, eixos}} \leq \begin{cases} 2b \\ 40 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{Eq. 63}$$

com **b** sendo a menor dimensão da seção transversal do pilar.

18.1.3 Armadura Mínima e Máxima

A armadura longitudinal mínima é calculada por (item 17.3.5.3.1):

$$A_{s, \text{mín}} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \text{Eq. 64}$$

onde: N_d = força normal de cálculo;
 f_{yd} = resistência de cálculo de início de escoamento do aço;
 A_c = área da seção transversal do pilar.

A armadura longitudinal máxima (item 17.3.5.3.2) é dada por:

$$A_{s,máx} = 0,08 A_c \quad \text{Eq. 65}$$

“A máxima armadura permitida em pilares deve considerar inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda, devendo ser também respeitado o disposto em 18.4.2.2.”

18.1.4 Detalhamento da Armadura

Um exemplo dos arranjos longitudinais típicos das armaduras dos pilares contraventados dos edifícios está mostrado na Figura 73.

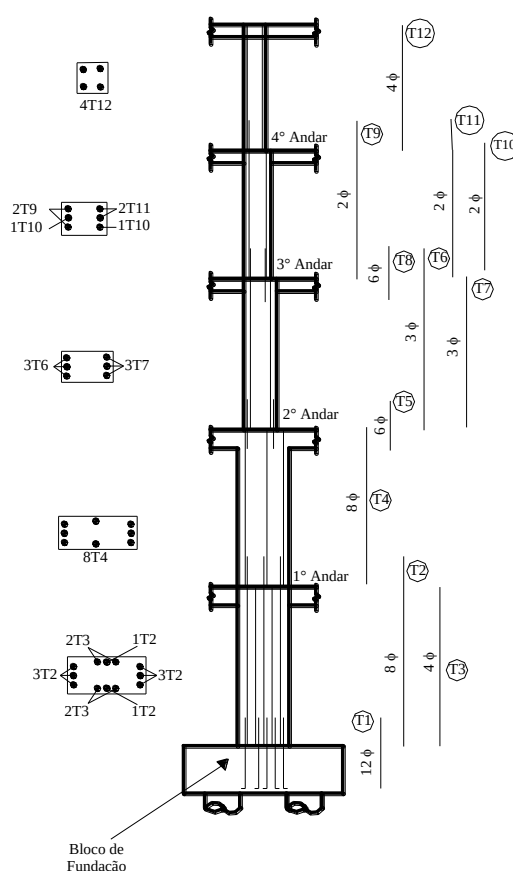


Figura 73 – Arranjos longitudinais típicos em edifícios (FUSCO, 2000).

18.1.5 Proteção contra Flambagem

No item 18.2.4 da NBR 6118 encontra-se: “Sempre que houver possibilidade de flambagem das barras da armadura, situadas junto à superfície do elemento estrutural, devem ser tomadas precauções para evitá-la. Os estribos poligonais garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância 20ϕ do canto, se nesse trecho de comprimento 20ϕ não houver mais de duas barras, não contando a de canto. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deve haver estribos suplementares.

Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos (90° a 180°), ele deve atravessar a seção do elemento estrutural, e os seus ganchos devem envolver a barra longitudinal.” (ver Figura 74 e Figura 75).

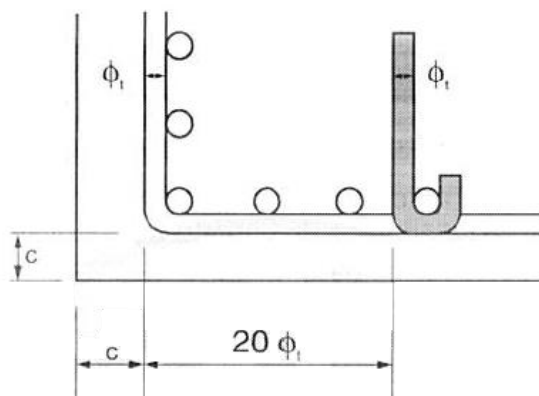


Figura 74 – Proteção contra flambagem das barras, segundo a NBR 6118.

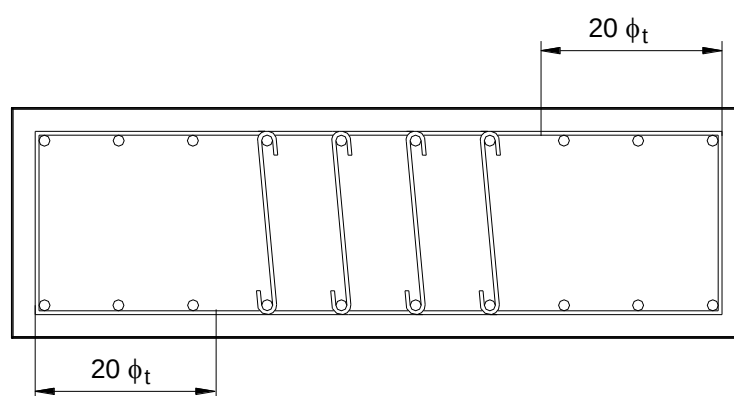


Figura 75 – Critério para proteção das barras longitudinais contra a flambagem.

“No caso de estribos curvilíneos cuja concavidade esteja voltada para o interior do concreto, não há necessidade de estribos suplementares. Se as seções das barras longitudinais se situarem em uma curva de concavidade voltada para fora do concreto, cada barra longitudinal deve ser ancorada pelo gancho de um estribo reto ou pelo canto de um estribo poligonal.”

18.2 Armadura Transversal de Pilares

“A armadura transversal de pilares, constituída por estribos e, quando for o caso, por grampos suplementares, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo obrigatória sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes.” (NBR 6118, 18.4.3). O diâmetro dos estribos em pilares deve obedecer a:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 \text{ ou } \phi_{\text{feixe}} / 4 \end{cases} \quad \text{Eq. 66}$$

“O espaçamento longitudinal entre estribos, medido na direção do eixo do pilar, para garantir o posicionamento, impedir a flambagem das barras longitudinais e garantir a costura das emendas de barras longitudinais nos pilares usuais, deve ser”:

$$s_{\text{máx}} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b \text{ (menor dimensão do pilar)} \\ 24\phi_\ell \text{ para CA - 25, } 12\phi_\ell \text{ para CA - 50} \end{cases} \quad \text{Eq. 67}$$

Pode ser adotado o valor $\phi_t < \phi_\ell / 4$ quando as armaduras forem constituídas do mesmo tipo de aço e o espaçamento respeite também a limitação:

$$s_{\text{máx}} = 90000 \left(\frac{\phi_t^2}{\phi_\ell} \right) \frac{1}{f_{yk}}, \text{ com } f_{yk} \text{ em MPa.} \quad \text{Eq. 68}$$

“Quando houver necessidade de armaduras transversais para forças cortantes e torção, esses valores devem ser comparados com os mínimos especificados em 18.3 para vigas, adotando-se o menor dos limites especificados.

Com vistas a garantir a ductilidade dos pilares, recomenda-se que os espaçamentos máximos entre os estribos sejam reduzidos em 50 % para concretos de classe C55 a C90, com inclinação dos ganchos de pelos menos 135°.”

18.3 Pilares-Parede

NBR 6118 (18.5): “No caso de pilares cuja maior dimensão da seção transversal exceda em cinco vezes a menor dimensão, além das exigências constantes nesta subseção e na subseção 18.4, deve também ser atendido o que estabelece a Seção 15, relativamente a esforços solicitantes na direção transversal decorrentes de efeitos de 1ª e 2ª ordens, em especial dos efeitos de 2ª ordem localizados.

A armadura transversal de pilares-parede deve respeitar a armadura mínima de flexão de placas, se essa flexão e a armadura correspondente forem calculadas. Caso contrário, a armadura transversal por metro de face deve respeitar o mínimo de 25 % da armadura longitudinal por metro da maior face da lâmina considerada.”

19 ESTIMATIVA DA CARGA VERTICAL NO PILAR POR ÁREA DE INFLUÊNCIA

Durante o desenvolvimento e desenho da planta de fôrma é necessário definir as dimensões dos pilares, antes mesmo que se conheçam os esforços solicitantes atuantes.

Alguns processos podem ser utilizados para a fixação das dimensões dos pilares, entre eles a experiência do engenheiro. Um processo simples, que auxilia a fixação das dimensões do pilar, é a estimativa da carga vertical no pilar pela sua área de influência, ou seja, a carga que estiver na laje dentro da área de influência do pilar “caminhará” até o pilar. A Figura 76 mostra como se pode, de modo simplificado, determinar a área de influência de cada pilar.

No entanto, é necessário ter um valor que represente a carga total por metro quadrado de laje, levando-se em conta todos os carregamentos permanentes e variáveis. Para edifícios de pequena altura, com fins residenciais e de escritórios, pode-se estimar a carga total de 10 kN/m². Edifícios com outros fins de utilização podem ter cargas superiores e edifícios onde a ação do vento é significativa, a carga por metro quadrado deve ser majorada.

É importante salientar que a carga estimada serve apenas para o pré-dimensionamento da seção transversal dos pilares. O dimensionamento final deve ser obrigatoriamente feito com os esforços solicitantes reais, calculados em função das cargas (reações) das vigas e lajes sobre o pilar, e com a atuação das forças do vento e outras que existirem.

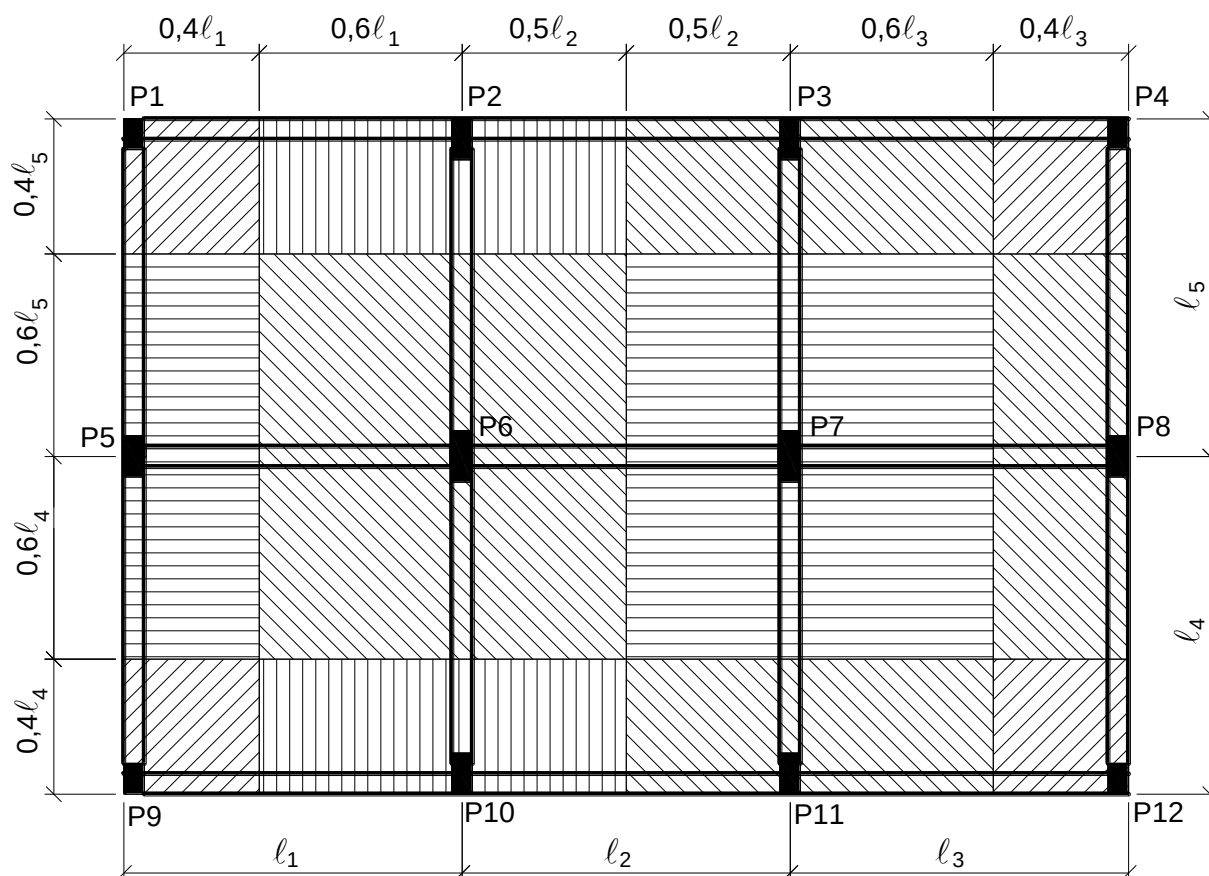


Figura 76 – Processo simplificado para determinação da área de influência dos pilares.

20 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DO PILAR

As equações para pré-dimensionamento da seção transversal de pilares, apresentadas a seguir, servem apenas para pilares de edificações de pequeno porte (baixa altura), e aço do tipo CA-50. Edifícios onde a ação do vento origina solicitações significativas devem ter a seção transversal majorada em relação àquelas resultantes deste pré-dimensionamento, ou outras equações devem ser utilizadas.

Em FUSCO (1994) consta um processo simplificado para o pré-dimensionamento da seção de pilares, e simplificando ainda mais o processo chegou-se às equações seguintes, em função do tipo de pilar, e para aço CA-50.

a) Pilar Intermediário

$$A_c = \frac{N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} \quad \text{Eq. 69}$$

b) Pilares de Extremidade e de Canto

$$A_c = \frac{1,5 N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} \quad \text{Eq. 70}$$

onde: A_c = área da seção transversal do pilar (cm²);
 N_d = força normal de cálculo (kN);
 f_{ck} = resistência característica do concreto (kN/cm²).

As equações podem ser refinadas para apresentarem resultados melhores, em função de algumas variáveis, principalmente da largura de pilares retangulares.

21 DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE UMA EDIFICAÇÃO DE BAIXA ALTURA

São apresentados a seguir exemplos práticos do dimensionamento de pilares de uma edificação de pequeno porte e baixa altura. A Figura 78 mostra a planta de fôrma do pavimento tipo do edifício, com três pavimentos. Por simplicidade, os efeitos do vento não serão considerados.

A planta de fôrma foi concebida considerando que existem paredes de alvenaria de vedação ao longo de toda a periferia da edificação, com espessura de “um tijolo”, confeccionadas com largura correspondente a de blocos cerâmicos furados de dimensão 19 cm, e por isso as vigas e pilares foram especificados com largura também de 19 cm, de tal modo a ficarem embutidos nas paredes. Já as paredes internas, sobre as vigas V2, V3 e V6, são de “meio tijolo”, com largura de blocos cerâmicos de vedação de dimensão 14 cm, de modo que essas vigas tem largura 14 cm, a fim de ficarem embutidas. Os pilares P5 e P8, com intenção de também ficarem embutidos nas paredes, serão inicialmente dimensionados com a largura de 14 cm.

A edificação está inserida em zona urbana de uma cidade de região litorânea, de tal modo que será considerada a classe de agressividade ambiental III. Em consequência, conforme a Tabela 7.1 e Tabela 7.2 da NBR 6118 e apresentado em BASTOS (2014)¹², o concreto deve ser no mínimo o C30 ($f_{ck} = 30$ MPa), a relação $a/c \leq 0,55$, e o cobrimento de concreto de 3,5 cm para viga e pilar, com $\Delta c = 5$ mm. A norma permite uma classe de agressividade mais branda para ambientes internos secos, por isso, no cálculo dos pilares internos à edificação (pilares P5 e P8), o cobrimento será diminuído para 2,5 cm. Os demais pilares, que encontram-se na periferia da edificação, serão calculados com cobrimento de 3,5 cm.

Outros dados adotados: aço CA-50, coeficientes de ponderação: $\gamma_c = \gamma_f = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$, concreto com brita 1, sem brita 2. Para a tensão de início de escoamento do aço será adotado o valor: $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 50/1,15 = 43,5$ kN/cm².

Serão dimensionados os lances entre o 1° e o 2° pavimentos, como indicado na Figura 77. A carga normal característica aplicada na base dos lances dos pilares a serem dimensionados está indicada na Tabela 5.

Tabela 5 – Carga normal (kN) característica nos pilares.

Pilar	P1	P2	P5	P6	P8
N_k	130	280	650	300	700

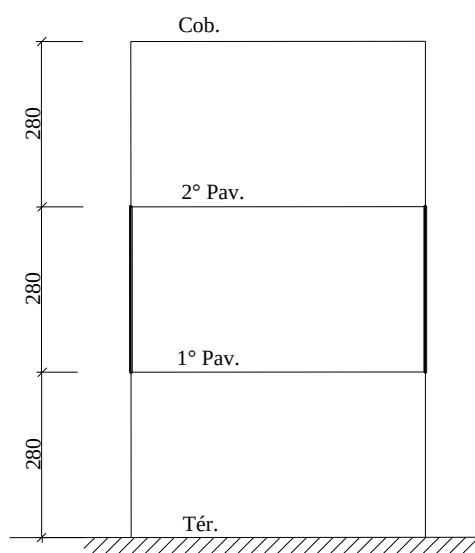


Figura 77 – Lance dos pilares a serem dimensionados.

¹² BASTOS, P.S.S. *Fundamentos*, Cap. 3. Disciplina 2117 – Estruturas de Concreto I. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia - Universidade Estadual Paulista (UNESP), set/2014, 29p. Disponível em (23/07/2015): <http://wwwwp.feb.unesp.br/pbastos/concreto1/Fundamentos.pdf>

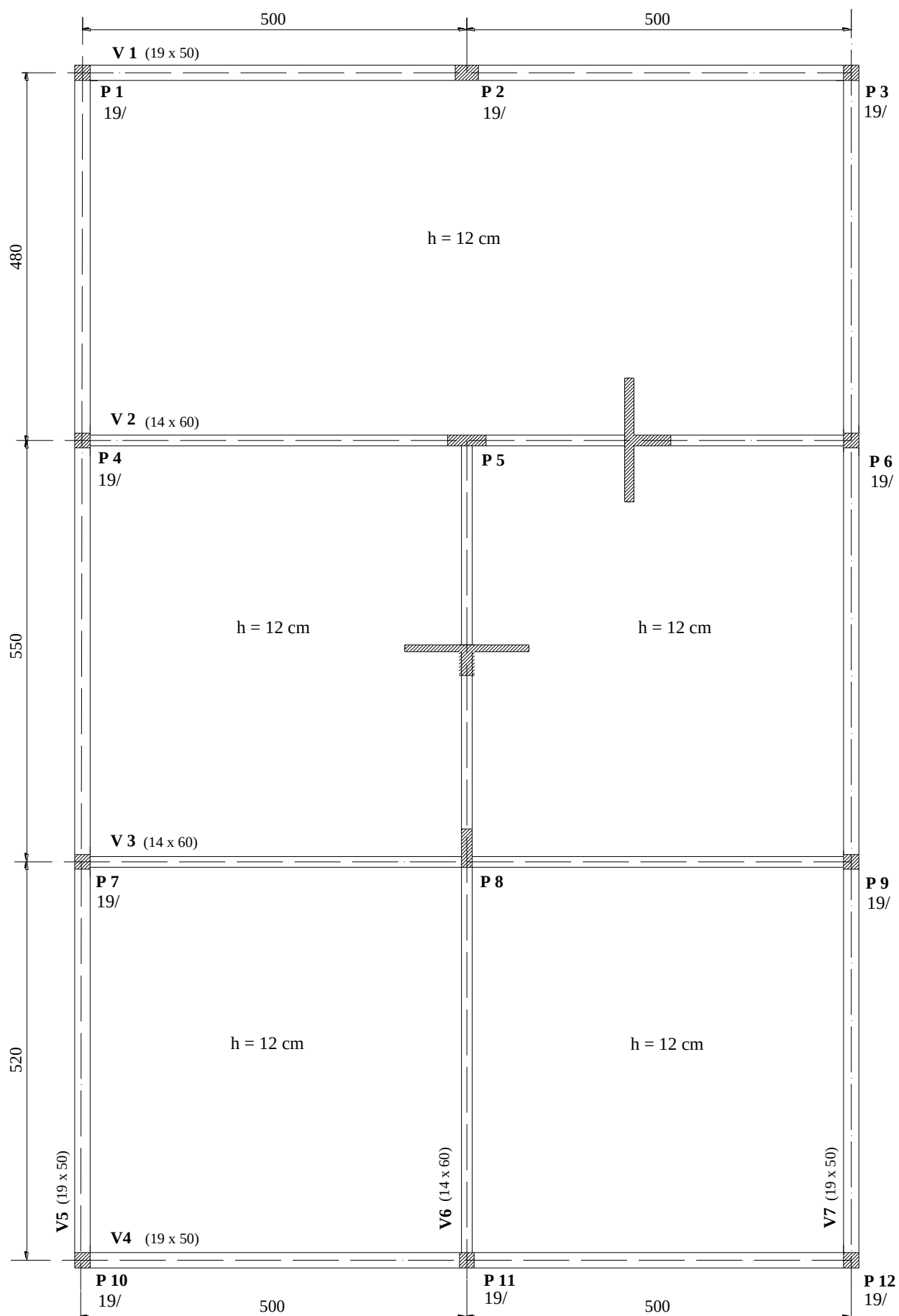


Figura 78 – Planta de fôrma do pavimento tipo do edifício.

A distância do centro da barra do canto até a face do pilar (d') é:

$$d' = c + \phi_t + \phi_l/2$$

Adotando $\phi_t = 5 \text{ mm}$ e $\phi_l = 12,5 \text{ mm}$, no cálculo dos pilares d' será considerado igual a:

$$\text{para } c = 3,5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad d' = 3,5 + 0,5 + 1,25/2 = 4,6 \text{ cm (pilares P1 e P6);}$$

$$\text{para } c = 2,5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad d' = 2,5 + 0,5 + 1,25/2 = 3,6 \text{ cm (pilares P5 e P8).}$$

21.1 Pilar Intermediário P8

Dados : $N_k = 700 \text{ kN}$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

O pilar P8 é classificado como pilar intermediário porque as vigas V3 e V6 são contínuas sobre o pilar, não originando flexão importante que deva ser considerada no cálculo do pilar.

a) Esforços solicitantes

A largura mínima de um pilar ou pilar-parede é 14 cm. Considerando que a largura do pilar seja de 14 cm, o coeficiente de majoração da carga (γ_n , Tabela 4) é 1,25. Segundo a NBR 6118, todas as ações atuantes no pilar devem ser majoradas por esse coeficiente. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,25 \cdot 1,4 \cdot 700 = 1.225 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 69):

$$A_c = \frac{N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1225}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 645 \text{ cm}^2$$

Pode-se adotar: $A_c = 14 \times 50 = 700 \text{ cm}^2$ (Figura 79). Geralmente adota-se o comprimento de pilares retangulares com valores múltiplos de 5 cm. A área mínima de um pilar deve ser de 360 cm^2 .

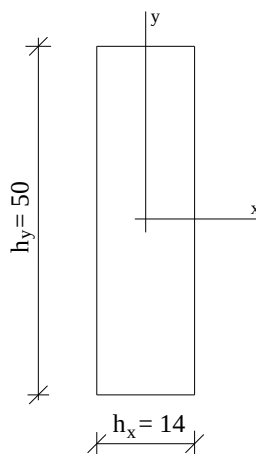


Figura 79 – Dimensões da seção transversal do pilar P8.

b) Índice de esbeltez (Eq. 30)

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{14} = 69,2$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

c) Momento fletor mínimo

O momento fletor mínimo, em cada direção, é calculado pela Eq. 34:

$$M_{1d,\min} = N_d (1,5 + 0,03 h) \quad , \text{ com } h \text{ em cm}$$

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\min,x} = 1225 (1,5 + 0,03 \cdot 14) = 2.352 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\min,y} = 1225 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.675 \text{ kN.cm}$$

d) Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Nos pilares intermediários não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem em ambas as direções principais x e y, isto é, $M_A = M_B = 0$ e $e_1 = 0$. Daí resulta que α_b é igual a 1,0 e:

$$\lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 69,2 > \lambda_{1,x} \rightarrow \text{são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

$$\lambda_y = 19,4 < \lambda_{1,y} \rightarrow \text{não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.}$$

e) Momentos fletores totais segundo o método do pilar-padrão com curvatura aproximada (Eq. 33)

$$M_{d,\text{tot}} = \alpha_b M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,\min} \end{cases} \quad , M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$$

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 20): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1225}{700 \frac{3,0}{1,4}} = 0,82$$

Curvatura na direção x sujeita a momentos fletores de 2ª ordem (Eq. 19):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} = \frac{0,005}{14(0,82 + 0,5)} = 2,7056 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{14} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,\min}$ em cada direção, tem-se os momentos fletores totais máximos:

Dir. x:

$$M_{d,\text{tot},x} = 1,0 \cdot 2.352 + 1225 \frac{280^2}{10} 2,7056 \cdot 10^{-4} = 4.950 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,x} = 2.352 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,\text{tot},x} = 4.950 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,\min,y} = 3.675 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar, da base ao topo, estão indicados na Figura 80, a qual mostra que o máximo momento fletor solicitante, na direção x (de maior esbeltez) é a soma do momento

fletor mínimo com o máximo momento fletor de segunda ordem: $2.352 + 2.598 = 4.950 \text{ kN.cm}$. Este valor também pode ser calculado com as excentricidades: $1.225 (1,92 + 2,12) \cong 4.950 \text{ kN.cm}$. A armadura final do pilar resulta deste momento fletor.

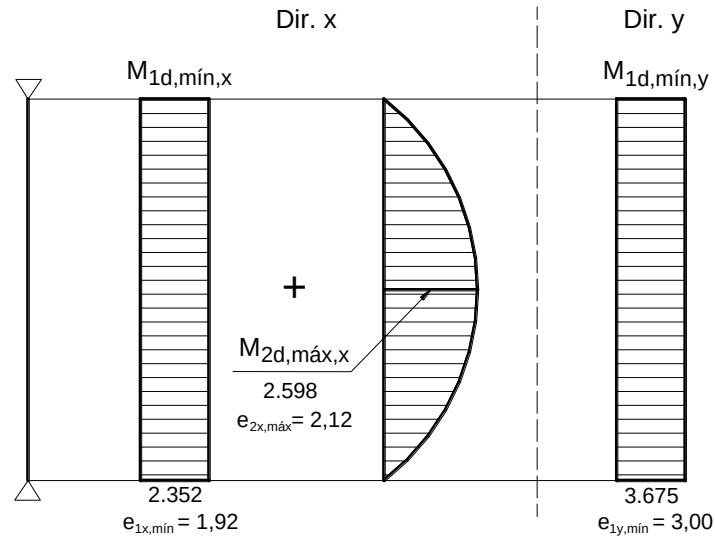


Figura 80 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

Com $\nu = 0,82$ e utilizando os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:¹³

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4950}{14 \cdot 700 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,24$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{3,6}{14} = 0,26 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,95$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3675}{50 \cdot 700 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,05$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{3,6}{50} = 0,07 \cong 0,05 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-24: } \omega = 0,12$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,95 \cdot 700 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 32,76 \text{ cm}^2$$

f) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 64):

$$A_{s,min} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,min} = 0,15 \frac{1225}{43,5} = 4,22 \text{ cm}^2$$

$$0,004 A_c = 0,004 \cdot 700 = 2,80 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 32,76 \text{ cm}^2 > A_{s,min} \quad \rightarrow \quad 16 \phi 16 \text{ mm } (32,00 \text{ cm}^2)$$

¹³ A rigor, neste exemplo o cálculo da armadura pode ser feito apenas para a direção x, sob maior momento fletor e na direção de menor rigidez do pilar. Os valores determinados para ω nas duas direções comprovam o fato.

A taxa de armadura resulta:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{32,00}{700} 100 = 4,6 \% \quad \rightarrow \quad \rho_s = 4,6 \% < \rho_{\max} = 8 \%$$

Conforme a Eq. 65, a taxa máxima de armadura é 8 %. No entanto, considerando que as armaduras dos diferentes lances do pilar sejam iguais, a taxa máxima deve ser reduzida à metade, pois na região de emenda das barras a armadura será dobrada, o que leva então à taxa máxima de 4 % em cada lance. Portanto, a taxa de armadura do pilar, de 4,6 %, supera o valor de 4 %.

Entre diversas soluções para resolver o problema, uma é escalonar as emendas das barras em regiões diferentes ao longo da altura do pilar. No caso de se aumentar a seção transversal do pilar, o aumento do comprimento pouco ajuda a diminuir a armadura, pois a direção crítica do pilar é a direção relativa à largura, e não a do comprimento. O aumento da largura do pilar é que pode diminuir significativamente a armadura longitudinal.

A título de exemplo, a largura do pilar será aumentada em apenas 1 cm, de 14 para 15 cm, e a armadura será novamente dimensionada, a fim de ilustrar a grande diferença de resultados. Os cálculos serão feitos apenas para a direção x, que é a crítica do pilar. Há que observar que o pilar ficará aparente na parede de alvenaria, a menos que se aumente a espessura dos revestimentos de argamassa das paredes adjacentes ao pilar.

a) Esforços solicitantes e força normal para a nova seção transversal ($A_c = 15 \times 50 = 750 \text{ cm}^2$)

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 700 = 1.176 \text{ kN}$$

b) Índice de esbeltez (Eq. 30)

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6$$

c) Momento fletor mínimo (Eq. 34)

$$\text{Dir. x: } M_{1d, \min, x} = 1176 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 2.293 \text{ kN.cm}$$

d) Esbeltez limite (Eq. 24)

$$\lambda_{1,x} = 35 \text{ (sem alteração)}$$

Desse modo:

$$\lambda_x = 64,6 > \lambda_{1,x} \rightarrow \text{são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;}$$

e) Momento fletor total segundo o método do pilar-padrão com curvatura aproximada (Eq. 33)

$$\text{Força normal adimensional (Eq. 20): } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1176}{750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,73$$

Curvatura na direção x sujeita a momentos fletores de 2ª ordem (Eq. 19):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} = \frac{0,005}{15(0,73+0,5)} = 2,7100 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{15} = 3,3333 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d, \text{tot}, x} = 1,0 \cdot 2.293 + 1176 \frac{280^2}{10} 2,7100 \cdot 10^{-4} = 4.791 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar, somente para a direção x, estão indicados na Figura 81.

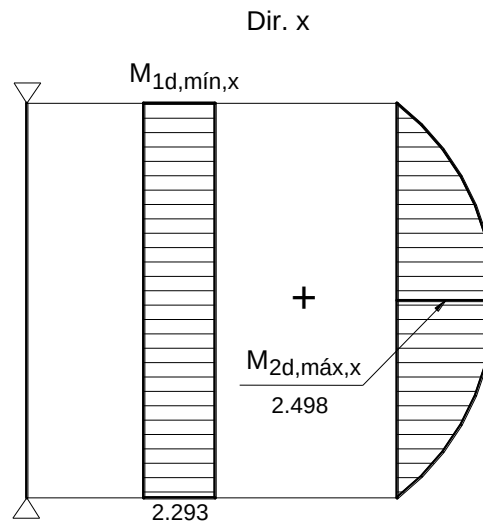


Figura 81 – Momentos fletores atuantes no pilar na direção x.

Coefficiente adimensional:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{4791}{15 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,20$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{3,6}{15} = 0,24 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,69$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,69 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 25,49 \text{ cm}^2$$

f) Detalhamento

$$A_s = 25,49 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 20 \phi 12,5 \text{ mm (25,00 cm}^2\text{) ou } 14 \phi 16 \text{ (28,00 cm}^2\text{)}$$

O ábaco A-5 indica que o momento fletor resultante da força normal excêntrica é em torno do eixo x, e que as barras devem ser distribuídas, simetricamente, nas duas faces paralelas ao mesmo eixo. Ou, de outro modo, que as barras sejam alojadas nas faces perpendiculares à excentricidade (e) da força normal. No caso em questão do pilar P8, de acordo com essas análises, as barras devem ficar distribuídas ao longo das faces maiores do pilar, de comprimento 50 cm.

A taxa de armadura, com 20 ϕ 12,5, resulta:

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{25,00}{750} 100 = 3,3 \%$$

$$\rho_s = 3,3 \% < \rho = 4 \% \quad (\text{da região de emenda de barras})$$

Portanto, o aumento da largura do pilar em apenas 1 cm, de 14 para 15 cm, fez a taxa de armadura diminuir para um valor aceitável. A armadura diminuiu em 22 %, de 32,76 para 25,49 cm² (de 16 ϕ 16 mm para 14 ϕ 16 ou 20 ϕ 12,5). Se a largura do pilar for de 16 cm, a armadura diminui em 41 %, para 19,31 cm² (de 16 ϕ 16 mm para 10 ϕ 16 ou 16 ϕ 12,5).

Com 20 ϕ 12,5, o diâmetro (ϕ) e espaçamento máximo dos estribos (Eq. 66 e Eq. 67) são:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 12,5 / 4 = 3,1 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{\text{máx}} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 15 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow s_{\text{máx}} = 15 \text{ cm}$$

A distância entre os eixos de duas barras adjacentes é:

$$a_v = \frac{50 - [2(2,5 + 0,5) + 10 \cdot 1,25]}{9} + 1,25 = 4,7 \text{ cm}$$

O canto do estribo protege contra a flambagem as barras (até 6) que estiverem dentro da distância $20 \phi_t$. Existem quatro barras protegidas por cada canto, e as demais, pelo critério da NBR 6118, necessitam de grampos suplementares (Figura 82). Uma alternativa, que resulta na diminuição de dois grampos, é fazer dois estribos independentes. A solução melhor será aquela mais simples de executar e mais econômica.

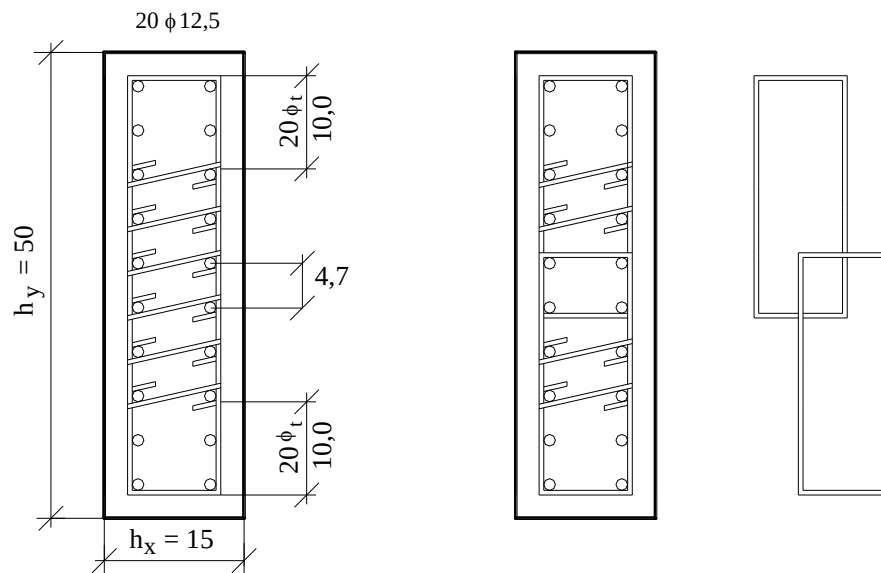


Figura 82 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P8.

21.2 Pilar de Extremidade P5

Dados: $N_k = 650 \text{ kN}$

$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$

O pilar P5, embora seja um pilar interno à edificação, é classificado como pilar de extremidade, porque tem a viga V6 não contínua sobre ele, o que origina momento fletor de 1ª ordem na direção da largura do pilar (dir. y - Figura 78).

a) Esforços solicitantes

Tendo em vista o cálculo já feito do pilar P8, será adotada também a largura de 15 cm. O coeficiente de majoração da carga (γ_n - Tabela 4) é 1,20. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_n \cdot \gamma_f \cdot N_k = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 650 = 1.092 \text{ kN}$$

Para o pré-dimensionamento com a Eq. 70 não é necessário majorar a força normal com o coeficiente γ_n , apenas com o γ_f (1,4):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5(1,4 \cdot 650)}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 718 \text{ cm}^2$$

Pode-se adotar: $A_c = 15 \times 50 = 750 \text{ cm}^2$ (Figura 83).

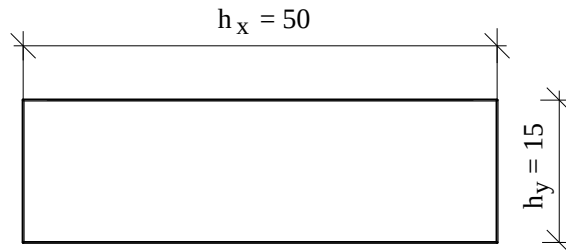


Figura 83 – Dimensões da seção transversal do pilar P5.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{50} = 19,4$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{15} = 64,6$$

c) Excentricidade de 1ª Ordem

$$e_{1y} = \frac{M_{yd}}{N_d} \quad \text{com } M_{yd} = \text{momento fletor de ligação entre a viga V6 e o pilar P5, na direção y.}$$

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar será avaliado com a Eq. 43 e Eq. 44, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\ell_{ex}} = \frac{\frac{50 \cdot 15^3}{12}}{\frac{280}{2}} = 100,4 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V6 com seção transversal 14 x 60 cm e vão efetivo de 525 cm (entre os pilares P5 e P8):

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{14 \cdot 60^3}{12} = 252.000 \text{ cm}^4$$

$$r_{viga} = \frac{I_{viga}}{\ell_{ef}} = \frac{252000}{525} = 480,0 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V6 no pilar P5 será adotada a carga total de 39 kN/m, conforme Figura 84.

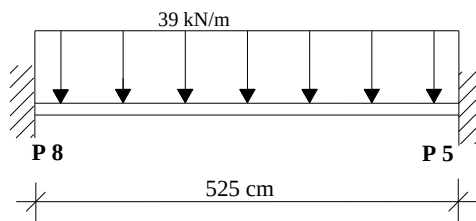


Figura 84 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P5.

O momento de engastamento perfeito no pilar P5 é:

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{39 \cdot 5,25^2}{12} = 89,58 \text{ kN.m} = 8.958 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 8958 \frac{100,4}{100,4 + 480,0 + 100,4} = 1.321 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar¹⁴, conforme mostrado na Figura 85, os momentos fletores totais, na base e no topo, são:

$$M_{k,\text{topo}} = -M_{k,\text{base}} = 1321 + \frac{1321}{2} = 1.982 \text{ kN.cm}$$

Transformando em momentos fletores de cálculo, com $\gamma_f = 1,4$ e $\gamma_n = 1,20$ (ver Tab. 4)¹⁵, que deve ser considerado porque a largura do pilar é inferior a 19 cm:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,20 \cdot 1,4 \cdot 1.982 = 3.330 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes na base e no topo do pilar estão indicados na Figura 85. A excentricidade de 1ª ordem na direção y é:

$$e_{1y} = \frac{3330}{1092} = 3,05 \text{ cm}$$

d) Momento fletor mínimo

$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

$$\text{Dir. x: } M_{1d,\text{mín},x} = 1092 (1,5 + 0,03 \cdot 50) = 3.276 \text{ kN.cm}$$

$$\text{Dir. y: } M_{1d,\text{mín},y} = 1092 (1,5 + 0,03 \cdot 15) = 2.129 \text{ kN.cm}$$

¹⁴ Os momentos fletores de 1ª ordem atuantes nos pilares devem ser estudados com cuidado, pois a propagação pode ser diferente da indicada neste exemplo, ou pode não existir. Tome como exemplo o lance do pilar relativo ao pavimento térreo, ou o lance entre o 2º pavimento e a cobertura.

¹⁵ Segundo a NBR 6118, os esforços solicitantes atuantes no pilar devem ser majorados por γ_n (ver Tabela 4).

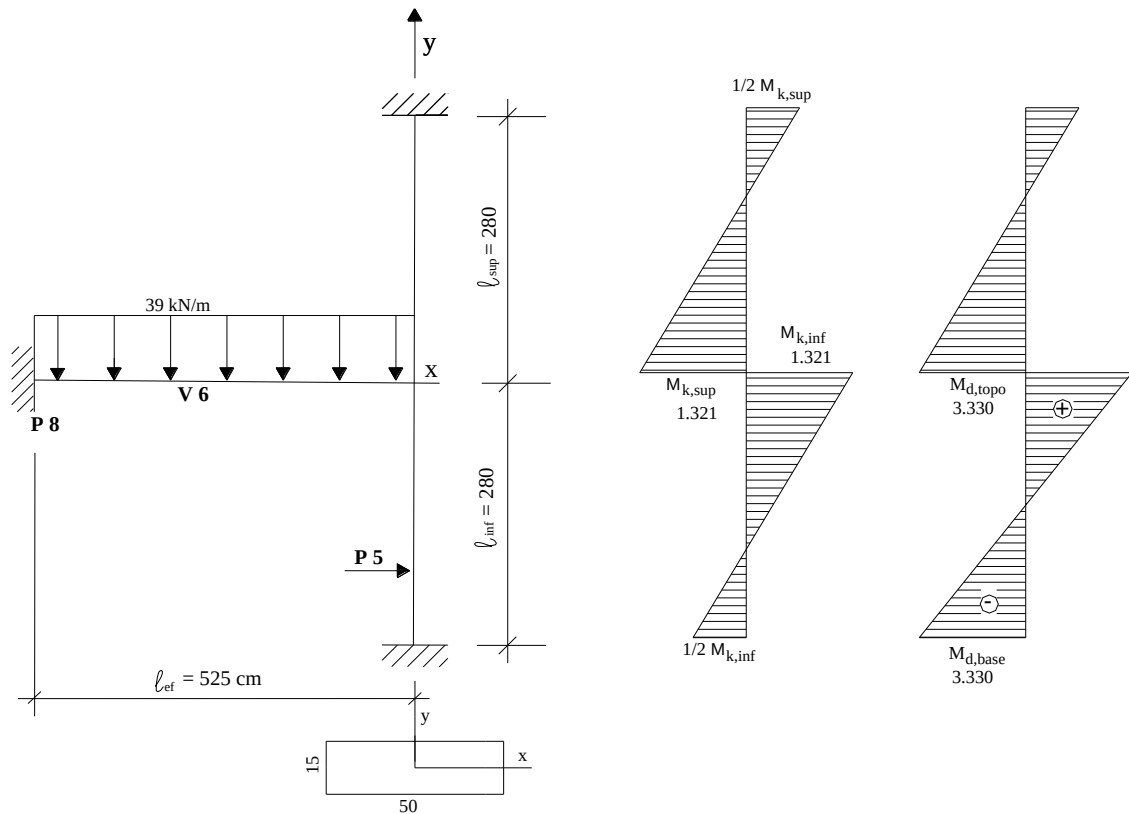


Figura 85 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) no topo e na base do pilar P5 na direção y.

e) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: Na direção x não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto, $e_{1x} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{35}}{1,0} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 35$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção y é 3,05 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem na direção y são $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 3.330$ kN.cm, maiores que o momento fletor mínimo nesta direção ($M_{1d,\min,y} = 2.129$ kN.cm), o que leva ao cálculo de α_b :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-3330)}{3330} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{3,05}{15}}{0,4} = 68,9 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 68,9$$

Desse modo:

$\lambda_x = 19,4 < \lambda_{1,x} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 64,6 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

f) Momento fletor total solicitante e cálculo da armadura

Como não é necessário considerar a excentricidade de 2ª ordem, o momento fletor total é igual ao máximo momento fletor de 1ª ordem, ou seja:

Dir. x:

$$M_{d,tot,x} = M_{1d,mín,x} = 3.276 \text{ kN.cm}$$

Dir. y:

$$M_{d,tot,y} = M_{1d,A} = 3.330 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,mín,y} = 2.129 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 86. A força normal adimensional é (Eq. 20):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1092}{750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,68$$

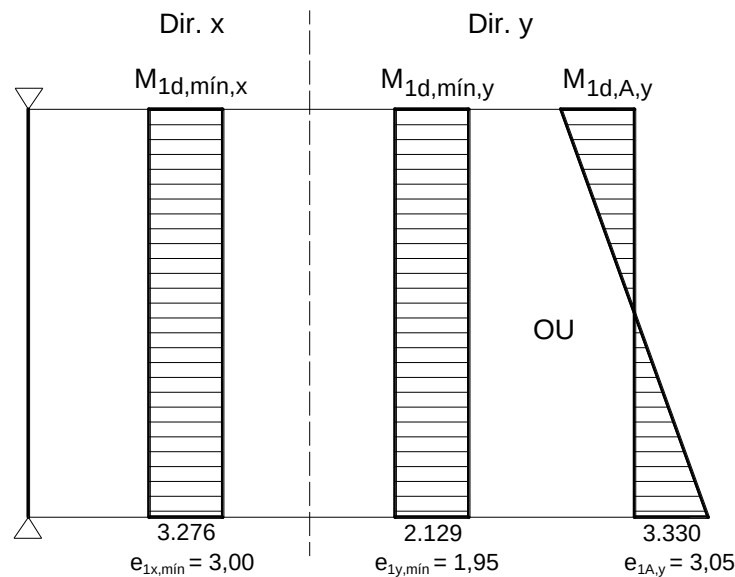


Figura 86 – Momentos fletores atuantes no pilar P5, nas direções x e y.

Com $v = 0,68$ e utilizando-se os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta, considerando apenas a direção relativa à largura do pilar (dir. y), que é a direção crítica:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3330}{15 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,14$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{3,6}{15} = 0,24 \cong 0,25 \quad \rightarrow \quad \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,38$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,38 \cdot 750 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 14,04 \text{ cm}^2$$

g) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 58):

21.3 Pilar de Extremidade P6

Dados: $N_k = 300 \text{ kN}$

$$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$$

a) Esforços solicitantes

O pilar P6 está na periferia da edificação e tem largura de 19 cm. O coeficiente de majoração da carga (γ_n - Tabela 4) deve ser considerado apenas para larguras entre 18 e 14 cm. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_f \cdot N_k = 1,4 \cdot 300 = 420 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 70):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5 \cdot 420}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 332 \text{ cm}^2$$

A área mínima de um pilar deve ser de 360 cm^2 , e pode-se adotar um pilar quadrado: $A_c = 19 \times 19 = 361 \text{ cm}^2$ (Figura 88).

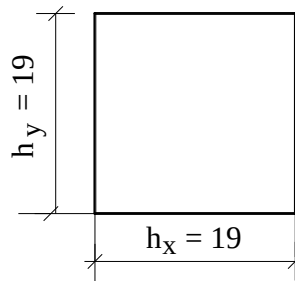


Figura 88 – Dimensões da seção transversal do pilar P6.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{3,46 \ell_e}{h} = \frac{3,46 \cdot 280}{19} = 51,0$$

c) Excentricidade de 1ª ordem

$e_{1x} = \frac{M_{xd}}{N_d}$, com M_{xd} = momento fletor de ligação entre a viga V2 e o pilar P6, na direção x.

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar será avaliado pelas Eq. 38 e 39, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\ell_{ex}} = \frac{\frac{19 \cdot 19^3}{12}}{\frac{280}{2}} = 77,6 \text{ cm}^3$$

A rigidez da viga V2, com seção transversal 14 x 60 cm e vão efetivo de 493 cm, é:

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{14 \cdot 60^3}{12} = 252.000 \text{ cm}^4$$

$$r_{\text{viga}} = \frac{I_{\text{viga}}}{\ell_{\text{ef}}} = \frac{252000}{493} = 511,2 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V2 no pilar P6 será adotada a carga total de 32 kN/m, conforme Figura 89.

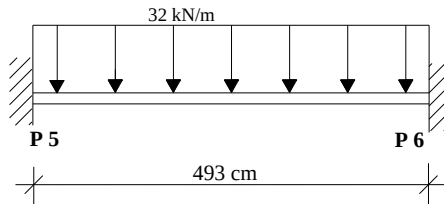


Figura 89 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P6.

O momento de engastamento perfeito no pilar P6 é:

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{32 \cdot 4,93^2}{12} = 64,81 \text{ kN.m} = 6.481 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 6481 \frac{77,6}{77,6 + 511,2 + 77,6} = 755 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar, conforme mostrado na Figura 90, os momentos fletores de cálculo totais, na base e no topo, são:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,4 \left(755 + \frac{755}{2} \right) = 1.586 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes na base e no topo do pilar estão indicados na Figura 90. A excentricidade de 1ª ordem na direção x é:

$$e_{1x} = \frac{1586}{420} = 3,78 \text{ cm}$$

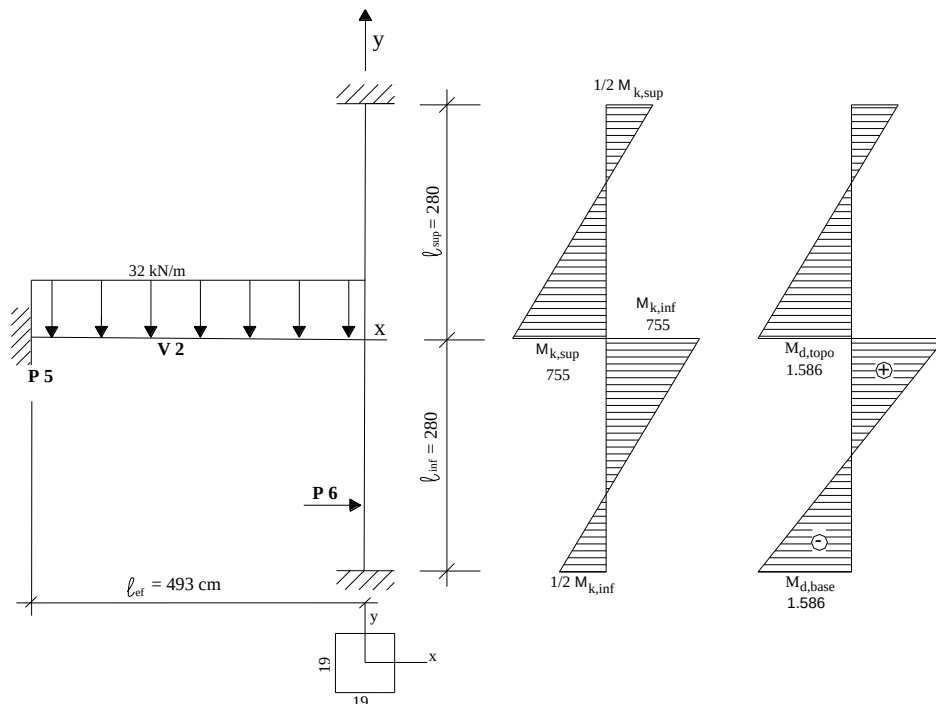


Figura 90 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) no topo e na base do pilar P6 na direção x.

d) Momento fletor mínimo

$M_{1d,min} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo é:

$$\text{Dir. x e y: } M_{1d,min,x} = M_{1d,min,y} = 420 (1,5 + 0,03 \cdot 19) = 869,4 \text{ kN.cm}$$

e) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad , \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 4,85 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem na direção x são $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 1.586 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo nesta direção (869,4 kN.cm), o que leva ao cálculo de α_b :

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-1586)}{1586} = 0,2 \geq 0,4 \quad \rightarrow \quad \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{3,78}{19}}{0,4} = 68,7 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,x} = 69$$

Dir. y: Na direção y não ocorrem momentos fletores e excentricidades de 1ª ordem, portanto, $e_{1y} = 0$ e $\alpha_b = 1,0$. Assim:

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{0}{19}}{1,0} = 25 \geq 35 \quad \rightarrow \quad \therefore \lambda_{1,y} = 35$$

Desse modo:

$\lambda_x = 51,0 < \lambda_{1,x}$ → não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 51,0 > \lambda_{1,y}$ → são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

f) Momentos fletores totais

O momento fletor de 2ª ordem na direção y será avaliado pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada.

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{\ell_e^2}{10 r} \geq \begin{cases} M_{1d,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} \quad , M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

$$\text{Força normal adimensional: } v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{420}{361 \frac{3,0}{1,4}} = 0,54$$

Curvatura na direção y sujeita a momentos fletores de 2ª ordem:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,50)} = \frac{0,005}{19(0,54 + 0,5)} = 2,5304 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \leq \frac{0,005}{19} = 2,63 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Fazendo $M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$ em cada direção, tem-se o momento total máximo:

Dir. x:

$$M_{d,tot,x} = 1.586 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,min,x} = 869,4 \text{ kN.cm} \quad \rightarrow \quad \text{ok!}$$

Dir. y:

$$M_{d,tot,y} = 1,0 \cdot 869,4 + 420 \frac{280^2}{10} 2,5304 \cdot 10^{-4} = 1.702,6 \geq M_{1d,min,y} = 869,4 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

$$M_{d,tot,y} = 1.702,6 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 91.

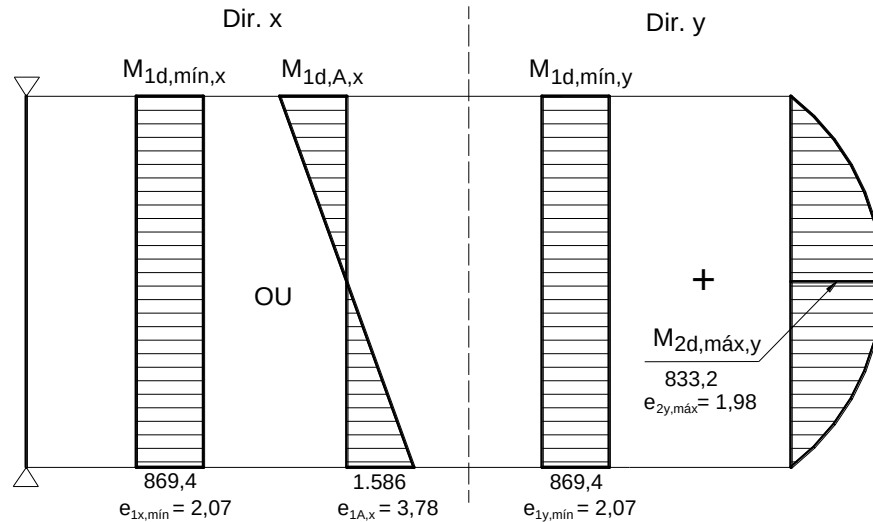


Figura 91 – Momentos fletores atuantes no pilar, nas direções x e y.

Com $v = 0,54$ e utilizando-se os ábacos de VENTURINI (1987) para Flexão Reta:

Dir. x:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1586}{19 \cdot 361 \frac{3,0}{1,4}} = 0,11$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25 \rightarrow \text{Ábaco A-9: } \omega = 0,09$$

Dir. y:

$$\mu = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1702,6}{19 \cdot 361 \frac{3,0}{1,4}} = 0,12$$

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25 \rightarrow \text{Ábaco A-5: } \omega = 0,13^{16}$$

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,13 \cdot 361 \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 2,31 \text{ cm}^2$$

g) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 58):

¹⁶ O detalhamento da armadura do ábaco A-9 não se compara exatamente ao detalhamento do ábaco A-5, mas neste caso há dificuldade porque faltam ábacos com $d'/h = 0,25$ na publicação de Venturini. Por outro lado, as diferenças nos detalhamentos não são significativas, e o mais importante é que os posiocionamentos das armaduras no pilar foram mantidos para ambos os ábacos. Outra questão é que o ábaco A-9 tem $d'/h = 0,20$, um valor muito próximo de 0,24, mas pelo valor menor resulta em uma armadura um pouco inferior. Como a armadura do pilar resulta a mínima, essa análise tem importância reduzida.

$$A_{s,\min} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,\min} = 0,15 \frac{420}{43,5} = 1,45 \geq 0,004 \cdot 361 = 1,44 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 2,31 \text{ cm}^2 > A_{s,\min} = 1,45 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad 4 \phi 10 \text{ mm} = 3,20 \text{ cm}^2 \quad (\text{ver Figura 92})$$

O diâmetro mínimo da barra longitudinal dos pilares deve ser de 10 mm (Eq. 61). A taxa de armadura resulta:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{3,20}{361} 100 = 0,89 \% < \rho_{\max} = 4 \%$$

O diâmetro (ϕ_t) e espaçamento máximo dos estribos (Eq. 66 e Eq. 67) são:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 10 / 4 = 2,5 \text{ mm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{\max} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 19 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,0 = 12 \text{ cm} \end{cases} \quad \rightarrow \quad s_{\max} = 12 \text{ cm}$$

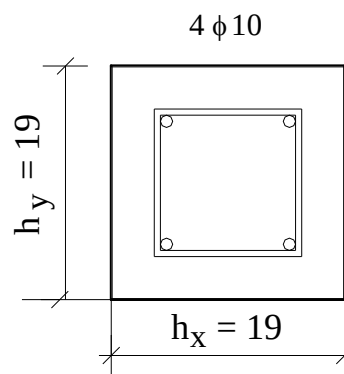


Figura 92 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P6.

21.4 Pilar de Canto P1

Dados: $N_k = 130 \text{ kN}$

$\ell_{ex} = \ell_{ey} = 280 \text{ cm}$

a) Esforços solicitantes

O pilar P1 está na periferia da edificação e tem largura de 19 cm. O coeficiente de majoração da carga (γ_n - Tabela 4) deve ser considerado apenas para larguras entre 18 e 14 cm. A força normal de cálculo é:

$$N_d = \gamma_f \cdot N_k = 1,4 \cdot 130 = 182 \text{ kN}$$

Pré-dimensionamento (Eq. 70):

$$A_c = \frac{1,5N_d}{0,5f_{ck} + 0,4} = \frac{1,5 \cdot 182}{0,5 \cdot 3,0 + 0,4} = 144 \text{ cm}^2$$

A área mínima de um pilar deve ser de 360 cm^2 , e neste caso pode-se adotar um pilar quadrado 19×19 (361 cm^2). No entanto, para melhor exemplificar os cálculos necessários a um pilar de canto, a seção será adotada com comprimentos diferentes para os lados, retangular 19×25 (475 cm^2), Figura 93.

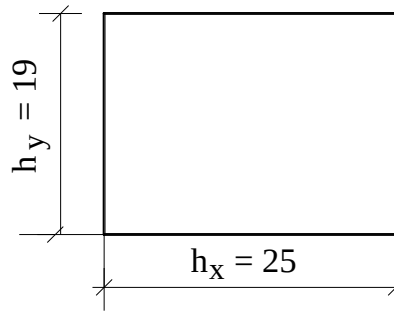


Figura 93 – Dimensões da seção transversal do pilar P1.

b) Índice de esbeltez

$$\lambda_x = \frac{3,46 \ell_{ex}}{h_x} = \frac{3,46 \cdot 280}{25} = 38,9$$

$$\lambda_y = \frac{3,46 \ell_{ey}}{h_y} = \frac{3,46 \cdot 280}{19} = 51,0$$

c) Excentricidades de 1ª ordem

Direção x:

$$e_{1x} = \frac{M_{xd}}{N_d}, \text{ com } M_{xd} = \text{momento fletor de ligação entre a viga V1 e o pilar P1, na direção x.}$$

O momento fletor solicitante na base e no topo do pilar será avaliado com a Eq. 43 e Eq. 44, sendo:

$$M_{k,inf} = M_{k,sup} = M_{k,eng} \frac{r_{pilar}}{r_{p,sup} + r_{viga} + r_{p,inf}}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{pilar} = r_{p,sup} = r_{p,inf} = \frac{I_{pilar}}{\ell_{ex}} = \frac{\frac{19 \cdot 25^3}{12}}{\frac{280}{2}} = 176,7 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V1, com seção transversal 19 x 50 cm e vão efetivo de 497 cm:

$$I_{viga} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{19 \cdot 50^3}{12} = 197.917 \text{ cm}^4$$

$$r_{viga} = \frac{I_{viga}}{\ell_{ef}} = \frac{197917}{497} = 398,2 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V1 no pilar P1 será adotada a carga total de 25 kN/m, conforme Figura 94.

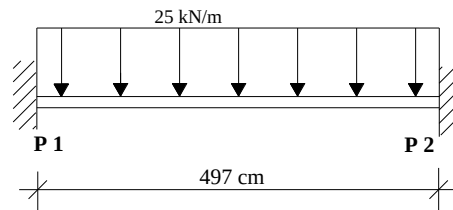


Figura 94 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P1.

O momento de engastamento perfeito no pilar P1 é:

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{25 \cdot 4,97^2}{12} = 51,46 \text{ kN.m} = 5.146 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores na base e no topo do lance do pilar resultam:

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 5146 \frac{176,7}{176,7 + 398,2 + 176,7} = 1.210 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar, os momentos fletores de cálculo totais, na base e no topo, são:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,4 \left(1210 + \frac{1210}{2} \right) = 2.541 \text{ kN.cm}$$

$$e_{1x} = \frac{2541}{182} = 13,96 \text{ cm}$$

Direção y:

$$e_{1y} = \frac{M_{yd}}{N_d} \quad \text{com } M_{yd} = \text{momento fletor de ligação entre a viga V5 e o pilar P1, na direção y.}$$

Supondo que a seção transversal do pilar não varia ao longo da sua altura, tem-se:

$$r_{\text{pilar}} = r_{p,\text{sup}} = r_{p,\text{inf}} = \frac{I_{\text{pilar}}}{\ell_{\text{ex}}} = \frac{\frac{25 \cdot 19^3}{12}}{\frac{280}{2}} = 102,1 \text{ cm}^3$$

Rigidez da viga V5, com seção transversal 19 x 50 cm e vão efetivo de 480 cm:

$$I_{\text{viga}} = \frac{b_w \cdot h^3}{12} = \frac{19 \cdot 50^3}{12} = 197.917 \text{ cm}^4$$

$$r_{\text{viga}} = \frac{I_{\text{viga}}}{\ell_{\text{ef}}} = \frac{197917}{480} = 412,3 \text{ cm}^3$$

Para o momento de engastamento perfeito da viga V5 no pilar P1 será adotada a carga total de 18 kN/m, conforme Figura 95.

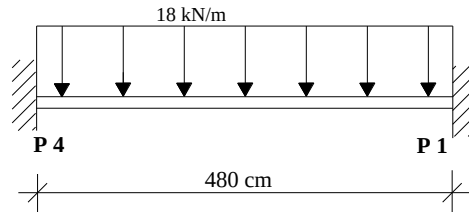


Figura 95 – Esquema estático e carregamento no vão da viga adjacente ao pilar P1.

$$M_{\text{eng}} = \frac{q \cdot \ell^2}{12} = \frac{18 \cdot 4,8^2}{12} = 34,56 \text{ kN.m} = 3.456 \text{ kN.cm}$$

$$M_{k,\text{inf}} = M_{k,\text{sup}} = 3456 \frac{102,1}{102,1 + 412,3 + 102,1} = 572,4 \text{ kN.cm}$$

Considerando a propagação dos momentos fletores no pilar, os momentos fletores de cálculo totais, na base e no topo, são:

$$M_{d,\text{topo}} = -M_{d,\text{base}} = 1,4 \left(572,4 + \frac{572,4}{2} \right) = 1.202 \text{ kN.cm}$$

$$e_{iy} = \frac{1202}{182} = 6,60 \text{ cm}$$

Os momentos fletores de 1ª ordem, nas direções x e y, estão mostrados na Figura 96.

d) Momento fletor mínimo

$M_{1d,\text{mín}} = N_d (1,5 + 0,03 h)$, com h em cm. O momento fletor mínimo, em cada direção é:

Dir. x: $M_{1d,\text{mín},x} = 182 (1,5 + 0,03 \cdot 25) = 409,5 \text{ kN.cm}$

Dir. y: $M_{1d,\text{mín},y} = 182 (1,5 + 0,03 \cdot 19) = 376,7 \text{ kN.cm}$

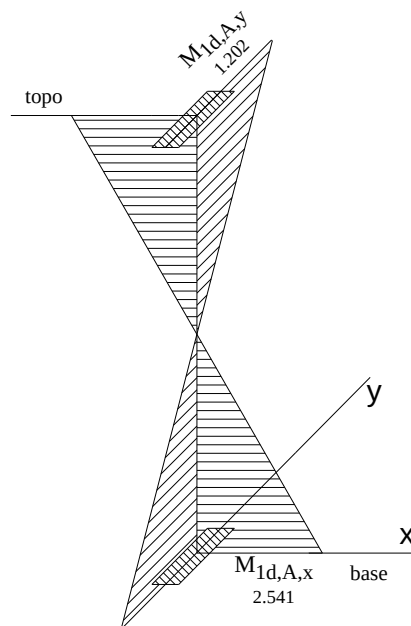


Figura 96 – Momentos fletores de 1ª ordem (kN.cm) atuantes no pilar P1.

e) Esbeltez limite

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \frac{e_1}{h}}{\alpha_b}, \text{ com } 35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

Dir. x: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção x é 13,96 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,x} = -M_{1d,B,x} = 2.541 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,\min,x} = 409,5 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b . Assim:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-2541)}{2541} = 0,2 \geq 0,4 \rightarrow \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,x} = \frac{25 + 12,5 \frac{13,96}{25}}{0,4} = 80,0 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,x} = 80,0$$

Dir. y: A excentricidade de 1ª ordem e_1 na direção y é 6,60 cm. Os momentos fletores de 1ª ordem nesta direção são $M_{1d,A,y} = -M_{1d,B,y} = 1.202 \text{ kN.cm}$, maiores que o momento fletor mínimo ($M_{1d,\min,y} = 376,7 \text{ kN.cm}$), o que leva ao cálculo de α_b . Assim:

$$\alpha_b = 0,6 + 0,4 \frac{M_B}{M_A} = 0,6 + 0,4 \frac{(-1202)}{1202} = 0,2 \geq 0,4 \rightarrow \therefore \alpha_b = 0,4$$

$$\lambda_{1,y} = \frac{25 + 12,5 \frac{6,60}{19}}{0,4} = 73,4 \geq 35 \rightarrow \therefore \lambda_{1,y} = 73,4$$

Desse modo:

$\lambda_x = 38,9 < \lambda_{1,x} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção x;

$\lambda_y = 51,0 < \lambda_{1,y} \rightarrow$ não são considerados os efeitos locais de 2ª ordem na direção y.

f) Momento fletor total solicitante e cálculo da armadura

Como não existem excentricidades de 2ª ordem o momento fletor total é igual ao máximo momento de 1ª ordem, ou seja:

Dir. x:

$$M_{d,\text{tot},x} = M_{1d,A,x} = 2.541 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,x} = 409,5 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Dir. y:

$$M_{d,\text{tot},y} = M_{1d,A,y} = 1.202 \text{ kN.cm} \geq M_{1d,\min,y} = 376,7 \text{ kN.cm} \rightarrow \text{ok!}$$

Os momentos fletores atuantes no pilar estão indicados na Figura 97. A força normal adimensional é (Eq. 20):

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{182}{475 \frac{3,0}{1,4}} = 0,18$$

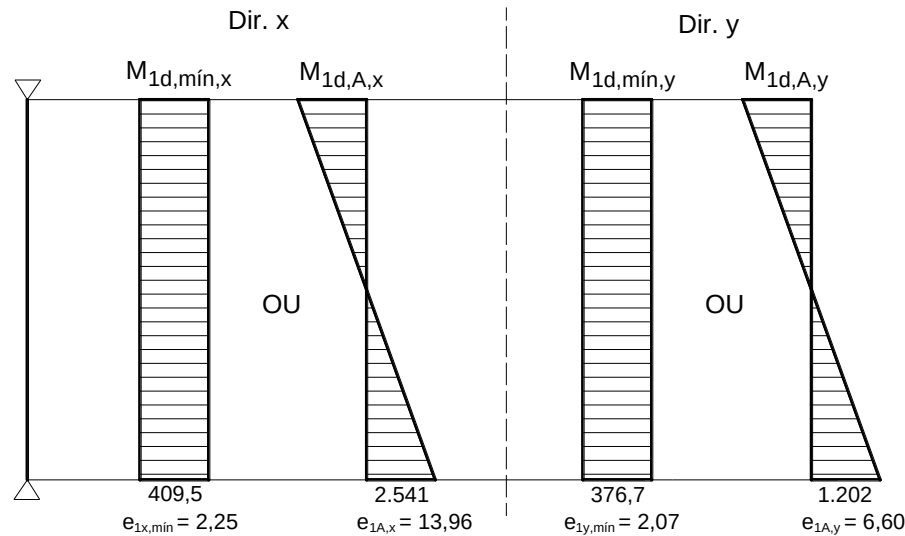


Figura 97 – Momentos fletores atuantes no pilar P1, nas direções x e y.

Coeficientes adimensionais de flexão considerando a Flexão Composta Oblíqua (Eq. 51 e 52):

$$\mu_x = \frac{M_{d,tot,x}}{h_x \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2541}{25 \cdot 475 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,10$$

$$\mu_y = \frac{M_{d,tot,y}}{h_y \cdot A_c \cdot f_{cd}} = \frac{1202}{19 \cdot 475 \cdot \frac{3,0}{1,4}} = 0,06$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,6}{25} = 0,18 \cong 0,20 \quad e \quad \frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,6}{19} = 0,24 \cong 0,25$$

Observa-se que na publicação de PINHEIRO (1994) para Flexão Composta Oblíqua não existe um ábaco que atenda as relações calculadas para d'/h , de 0,20 e 0,25. No entanto, considerando o valor 0,18 como aproximadamente 0,15, pode-se escolher o ábaco A-67.¹⁷ Com $v = 0,18$ e interpolando entre $v = 0,0$ e $v = 0,2$, a taxa de armadura resulta:

- para $v = 0,0$ → $\omega = 0,30$
- para $v = 0,2$ → $\omega = 0,18$
- para $v = 0,18$ → $\omega = 0,19$

A armadura resulta:

$$A_s = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,19 \cdot 475 \cdot \frac{3,0}{1,4}}{43,5} = 4,45 \text{ cm}^2$$

g) Detalhamento

Armadura mínima (Eq. 58):

$$A_{s,min} = 0,15 \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 A_c \quad \rightarrow \quad A_{s,min} = 0,15 \frac{182}{43,5} = 0,63 \text{ cm}^2 \geq 0,004 \cdot 475 = 1,90 \text{ cm}^2$$

¹⁷ Utilizar um ábaco com relação d'/h menor implica calcular uma armadura um pouco menor que a necessária.

$A_s = 4,45 \text{ cm}^2 > A_{s,\text{mín}} = 1,90 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \phi 125 \text{ mm } (5,00 \text{ cm}^2)$, ver Figura 98.

A taxa de armadura resulta:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 = \frac{5,00}{475} 100 = 1,05 \% < \rho_{\text{máx}} = 4 \% \rightarrow \text{ok!}$$

O diâmetro (ϕ_t) e espaçamento máximo dos estribos (Eq. 66 e Eq. 67) são:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ \phi_\ell / 4 = 12,5 / 4 = 3,1 \text{ mm} \end{cases} \rightarrow \phi_t = 5 \text{ mm}$$

$$s_{\text{máx}} \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 19 \text{ cm} \\ 12\phi_\ell = 12 \cdot 1,25 = 15 \text{ cm} \end{cases} \rightarrow s_{\text{máx}} = 15 \text{ cm}$$

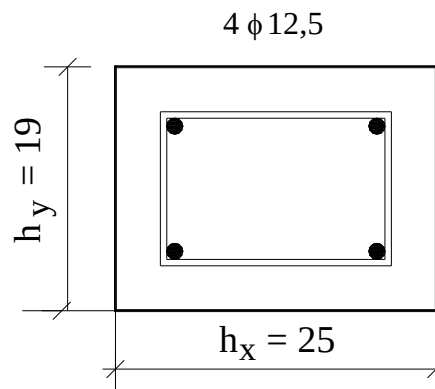


Figura 98 – Detalhamento da armadura na seção transversal do pilar P1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building code requirements for structural concrete*, ACI 318 R-95. Farmington Hills, 1995, 369p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014, 238p.

BASTOS, P.S.S. *Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante*. Disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia - Universidade Estadual Paulista (UNESP), abr/2015, 74p. Disponível em (30/07/2015): http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

BASTOS, P.S.S. *Ancoragem e emenda de armaduras*. Disciplina 2123 – Estruturas de Concreto II. Bauru/SP, Departamento Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia - Universidade Estadual Paulista (UNESP), maio/2015, 40p. Disponível em (30/07/2015): http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto2.htm

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990: final draft*. Bulletin D'Information, n.203, 204 e 205, jul., 1991.

FUSCO, P.B. *Estruturas de concreto - Solicitações normais*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois, 1981, 464p.

PINHEIRO, L.M. ; BARALDI, L.T. ; POREM, M.E. *Concreto Armado: Ábacos para flexão oblíqua*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1994.

PINHEIRO, L.M. *Instabilidade. Notas de Aula*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1994.

SÜSSEKIND, J.C. *Curso de concreto*, v. 2, 4ª ed., Porto Alegre, Ed. Globo, 1984, 280p.

VENTURINI, W.S. *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1987.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-14: *Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, ACI committee 318, 2014, 520p. 26.

CARVALHO, R.C. ; PINHEIRO, L.M. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*, v. 2. São Paulo, Ed. Pini, 2009, 589p.

EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION. Eurocode 2 – *Design of concrete structures*, Part 1-1, Part 1-2. 2005.

FUSCO, P.B. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Ed. Pini, 2000, 382p.