

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

SET 410 Estruturas de concreto armado II

Turma 1 - 2008

Concreto armado: projeto de pilares de acordo com a NBR 6118:2003

Gerson Moacyr Sisniegas Alva  
Ana Lúcia Homce de Cresce El Debs  
José Samuel Giongo

São Carlos, 13 de Fevereiro de 2008.



## 1. Introdução

(13 de Fevereiro de 2008)

Em estruturas de edifícios, os pilares são elementos verticais que têm a função primária de transmitir as ações verticais gravitacionais e de serviço e as horizontais (vento) às fundações, além de conferirem estabilidade global ao edifício. Os pilares usuais dos edifícios apresentam um comportamento de flexo-compressão, sendo as forças normais de compressão preponderantes.

Em edifícios correntes de concreto armado, as seções dos pilares são geralmente retangulares. Pilares de seções quadradas ou circulares também podem ser considerados em projetos estruturais de edifícios para atender o indicado no projeto arquitetônico.

Em virtude do tipo de material (concreto) e da solicitação preponderantemente de força de compressão, os pilares apresentam rupturas frágeis. A ruína de uma seção transversal de um único pilar pode ocasionar o colapso progressivo dos demais pavimentos subseqüentes provocando, assim, a ruína de toda a estrutura. As disposições dos pilares na planta de forma de um edifício são importantes, pois o posicionamento destes, juntamente com as vigas, formam pórticos que proporcionam rigidez e conferem estabilidade global ao edifício.

Por consequência, os pilares são peças estruturais do edifício que precisam ser projetados cuidadosamente, englobando os dimensionamentos e os detalhamentos corretos.

Projetos adequados de elementos de concreto estrutural, em termos de resistência, estabilidade e durabilidade, precisam ser feitos de acordo com as diretrizes e recomendações de normas técnicas.

Este texto foi escrito considerando os critérios da NBR 6118:2003 – Projeto de estruturas de concreto, edição de 2004.

## 2. Classificação dos pilares em edifícios

### 2.1 Quanto à posição

Os pilares podem ser classificados de acordo com a sua posição na planta de forma de um pavimento tipo de edifício em: *pilares intermediários*, *pilares de extremidade* e *pilares de canto*, conforme a figura 2.1. Essa classificação permite considerar as diferentes situações de projeto e de cálculo, em relação aos esforços solicitantes, em que cada um desses pilares se enquadra.

#### 2.1.1 Pilares Intermediários:

Considera-se que os pilares intermediários estejam submetidos preponderantemente às forças axiais de compressão, pois os módulos dos momentos fletores são de pequena intensidade, em relação às ações verticais apenas (as permanentes e as variáveis normais). A menos que os vãos das vigas contínuas que se apóiam nesses pilares sejam consideravelmente diferentes, desprezam-se os momentos fletores finais transmitidos aos pilares. Portanto, na situação de projeto, admite-se o pilar intermediário submetido a uma *compressão centrada*, isto é a excentricidade inicial é considerada igual a zero para o dimensionamento das áreas das armaduras longitudinal e transversal.

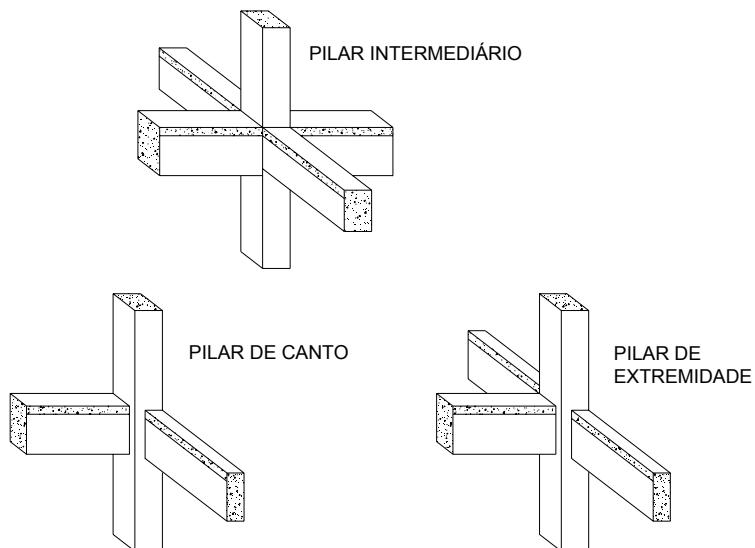
#### 2.1.2 Pilares de extremidade

Os pilares de extremidade, além de estarem submetidos às forças normais de compressão, também estão sujeitos à ação de momentos transmitidos pelas vigas que têm suas extremidades externas nesses pilares. Não considerados os momentos transmitidos por vigas transversais ao eixo da viga interrompida. Portanto, na situação de projeto, admite-se o pilar de extremidade submetido à *flexão normal composta*,

considerando-se, portanto, excentricidade inicial segundo uma das ordenadas locais da seção transversal do pilar.

### 2.1.3 Pilares de canto

Além da força normal de compressão atuante consideram-se os momentos transmitidos pelas vigas, cujos planos médios são perpendiculares às faces dos pilares, e são interrompidas nas bordas do pilar. Na situação de projeto, portanto, considera-se o pilar de canto submetido à *flexão oblíqua composta*, com excentricidades iniciais segundo os eixos coordenados locais.



**Figura 2.1** - Posição dos pilares em edifícios [Fusco, 1981]

### 2.2 Quanto ao tipo de solicitação

Embora a classificação quanto à posição na estrutura ainda seja bastante usual, a tendência é substituí-la por outra que considere simplesmente o tipo de solicitação a que o pilar está submetido. Ou seja, *pilares sob compressão centrada*, *pilares sob flexão composta normal* e *pilares sob flexão composta oblíqua*.

Assim, poderiam ser enquadrados casos especiais em que a classificação quanto à posição não conduz à real forma de solicitação do pilar. É o que ocorre, por exemplo, quando uma viga é interrompida em um pilar interno, deixando este de estar sob compressão centrada na situação de projeto.

Na análise estrutural, que tem por finalidade determinarem-se os esforços solicitantes nas barras da estrutura, feita por processo aproximado, sem assistência de programa computacional, pode ser útil a classificação indicada.

Quando se determinam os esforços solicitantes considerando o efeito de pórtico espacial, como atualmente é feito nos projetos de estruturas de edifícios, os pilares são todos submetidos a ações de *flexão composta oblíqua*, ou seja, força normal e momentos fletores com planos de ações em duas direções.

### 2.3 Quanto à esbeltez

#### 2.3.1 Definição de índice de esbeltez

O índice de esbeltez dos pilares de concreto armado que fazem parte de estruturas de edifícios é a razão entre o comprimento equivalente ( $\ell_e$ ) do pilar e o raio de giraçāo ( $i$ ) da seção, conforme expressão 2.6:

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i} \quad \text{com} \quad i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \quad (2.6)$$

sendo que,

$I_c$  é o momento de inércia da seção de concreto na direção analisada;

$A_c$  é a área da seção transversal de concreto.

O comprimento equivalente  $\ell_e$  do pilar, suposto vinculado em ambas as extremidades, assume o menor dos seguintes valores:

$$\begin{aligned} \ell_e &= \ell_o + h \\ \ell_e &= \ell \end{aligned} \quad (2.7)$$

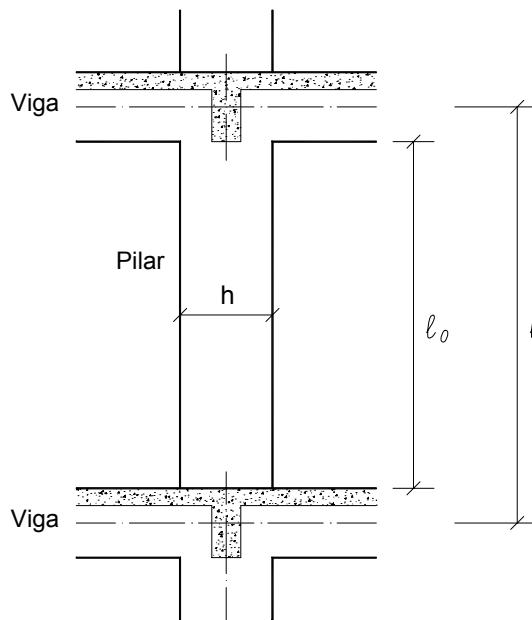
sendo que:

$\ell_o$  a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;

$h$  é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura;

$\ell$  é a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

Essas definições são ilustradas na figura 2.3:



**Figura 2.3 - Determinação do comprimento equivalente  $\ell_e$  ( $\ell_o$  e  $\ell$ )**

Conhecendo-se o comprimento equivalente em cada direção, o índice de esbeltez em seções retangulares pode ser calculado por:

$$\lambda = \frac{\ell_e \cdot \sqrt{12}}{h} \quad (2.8)$$

sendo que  $h$  é a medida da seção transversal paralela ao plano de ação do momento atuante no pilar, oriundo da ligação com a viga.

### 2.3.2 Critérios da NBR 6118:2003 para cálculo do valor de referência $\lambda_1$

Com os critérios de projeto de pilares indicados na NBR 6118:2003, os limites de esbeltez que definem a classificação dos pilares, dependem de fatores adicionais, tais como a excentricidade relativa, as condições de vinculação das extremidades e da forma do diagrama de momentos fletores. Esses fatores são considerados por meio do coeficiente  $\lambda_1$ , o qual é calculado por:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_1}{h}}{\alpha_b} \quad (2.1)$$

com a restrição para o coeficiente  $\lambda_1$  dado por:

$$35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

sendo:

$e_1/h$  a excentricidade relativa de primeira (1.<sup>a</sup>) ordem, não incluindo a excentricidade acidental;

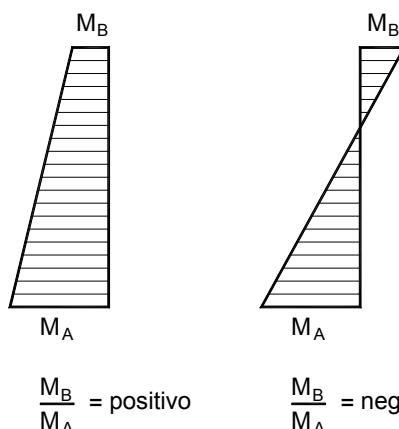
$\alpha_b$  um coeficiente que depende da distribuição de momentos no pilar.

O valor de  $\alpha_b$  pode ser obtido de acordo com as seguintes situações:

a.- Para pilares biapoiados sem cargas transversais (figura 2.2):

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \cdot \frac{M_B}{M_A} \geq 0,40 \quad (2.2)$$

sendo  $M_A$  e  $M_B$  os momentos solicitantes de 1º ordem nas extremidades do pilar. Adota-se para  $M_A$  o maior valor absoluto entre os dois momentos de extremidade. Adota-se o sinal positivo para  $M_B$ , se este tracionar a mesma face que  $M_A$  (curvatura simples), e negativo em caso contrário (curvatura dupla).



$$\frac{M_B}{M_A} = \text{positivo} \quad \frac{M_B}{M_A} = \text{negativo}$$

**Figura 2.2** - Curvaturas simples e dupla dos pilares – cálculo de  $\alpha_b$

b.- Para pilares biapoiados com cargas transversais significativas ao longo da altura:

$$\alpha_b = 1,0 \quad (2.3)$$

c.- Para pilares em balanço:

$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \cdot \frac{M_C}{M_A} \geq 0,85 \quad (2.4)$$

sendo:

$M_A$  o momento de 1º ordem no engaste e  $M_C$  é o momento de 1º ordem no meio do pilar em balanço;

$$0,85 \leq \alpha_b \leq 1,0$$

d.- Para pilares biapoiados ou em balanço com momentos menores que o momento mínimo, estabelecido pela expressão (3.8):

$$\alpha_b = 1,0 \quad (2.5)$$

### 2.3.3 Critérios da NBR 6118:2003 para consideração dos efeitos de segunda ordem

Quanto à esbeltez, os pilares podem ser classificados como:

Pilares curtos ( $\lambda \leq \lambda_1$ ) em que os índices de esbeltez são menores que os de referência e, portanto, os efeitos de segunda ordem não precisam ser considerados.

Pilares medianamente esbeltos ( $\lambda_1 < \lambda \leq 90$ ) que são aqueles para os quais podem ser considerados os efeitos de segunda ordem por processo aproximado como o método do pilar-padrão com curvatura aproximada.

Pilares esbeltos ( $90 < \lambda \leq 140$ ) são aqueles para os quais é possível considerar-se nos projetos o método do pilar-padrão acoplado a diagramas de  $M - N - 1/r$ .

Pilares muito esbeltos ( $140 < \lambda \leq 200$ ) que exigem a consideração de processos exatos para a verificação do estado limite de instabilidade.

A NBR 6118:2003 não permite que se projete e construa pilar com índice de esbeltez ( $\lambda$ ) maior do que 200. Esse pode ser ultrapassado nos casos de postes com força normal menor do que  $0,10 \cdot f_{cd} \cdot A_c$ .

Neste texto só são estudados pilares com índice de esbeltez menor do que 90, ou seja, ( $\lambda \leq 90$ ). Na EESC – USP os projetos de pilares com índices de esbeltez entre 90 e 200 são estudados na disciplina optativa Estruturas de Concreto C, ministrada no segundo semestre do ano letivo.

## 3. Dimensionamento de pilares de concreto armado

### 3.1 Considerações iniciais

Os princípios do equilíbrio de forças e momentos, da compatibilidade de deformações e os domínios de deformações utilizados na análise de vigas são igualmente aplicados aos pilares. No caso de pilares, a força normal é introduzida às equações, tornando o problema como um caso de flexão composta normal ou de flexão composta oblíqua.

No caso de flexão composta oblíqua, a obtenção de uma solução geral por meio das equações de equilíbrio e compatibilidade é praticamente impossível, uma vez que é desconhecida a distância e a inclinação da linha neutra. Do ponto de vista prático, tanto no caso de flexão composta reta e principalmente no caso de flexão composta oblíqua, podem ser utilizados ábacos, que são de fácil utilização e boa precisão, ou programas computacionais de dimensionamento da área de armadura.

Com relação à utilização dos ábacos, nestes normalmente são preestabelecidas a forma da seção e a disposição das barras da armadura, necessitando conhecer, além das propriedades mecânicas dos materiais aço e concreto, as excentricidades calculadas nos procedimentos de dimensionamento.

As excentricidades nos pilares ocorrem não só por conta das solicitações iniciais atuantes nos pilares, mas também por causa de fatores adicionais como os efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem, as imperfeições geométricas e a fluência do concreto.

### 3.2 Excentricidades consideradas no dimensionamento

Para o dimensionamento dos pilares, é necessário obter as excentricidades pertinentes ao tipo de pilar analisado. Apresentam-se neste item os critérios para a obtenção dessas excentricidades em pilares isolados, de acordo com as recomendações da norma NBR 6118:2003.

#### 3.2.1 Excentricidade inicial de 1.<sup>a</sup> ordem

Como é sabido as vigas e os pilares formam os pórticos tridimensionais, de tal modo que os pilares ficam submetidos a flexão oblíqua composta e, portanto, apresentam excentricidades iniciais em duas direções principais medidas a partir do centro geométrico do pilar, e numericamente iguais aos valores dos momentos com plano de ação contendo cada eixo principal divididos pelo módulo da força normal de compressão, conforme expressões 3.1.

Nos casos de projetos em que se consideram processos simplificados para a determinação dos esforços solicitantes (força normal, momento fletor e força cortante), por exemplo, o processo de viga contínua indicado na NBR 61228:2003, admite-se que as excentricidades iniciais surjam nos pilares de extremidade e nos pilares de canto. Lembra-se que para os pilares intermediários as excentricidades não são consideradas.

As excentricidades iniciais são calculadas com a expressão 3.1:

$$e_{i,A} = \frac{M_{di,A}}{N_d} \quad e_{i,B} = \frac{M_{di,B}}{N_d} \quad (3.1)$$

sendo:

$N_d$  a força normal solicitante de cálculo;

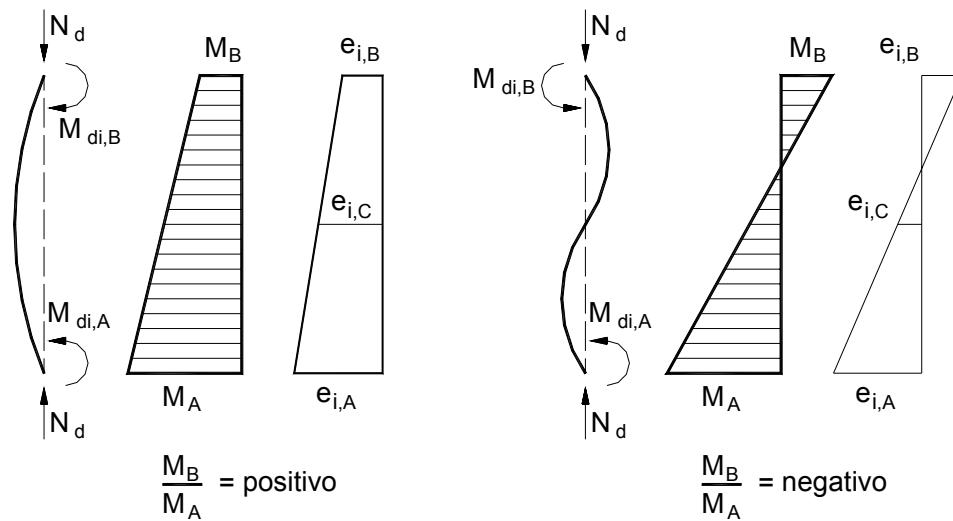
$M_{di,A}$  e  $M_{di,B}$  os momentos solicitantes de cálculo nas extremidades do pilar.

Neste texto adota-se, de acordo com a NBR 6118:2003, para  $e_{i,A}$  a maior excentricidade em valor absoluto.

Além das excentricidades iniciais nas extremidades do pilar, precisa ser realizada uma análise dos efeitos locais de 2.<sup>a</sup> ordem ao longo do eixo. Normalmente, em pilares de edifícios, os máximos momentos iniciais ocorrem em suas extremidades e os máximos momentos de 2.<sup>a</sup> ordem ocorrem em suas seções intermediárias. Por esse motivo, a NBR 6118:1978 especificava que se considerasse uma excentricidade inicial na seção intermediária (meio do vão) do pilar dada por:

$$e_{ic} = 0,6 \cdot e_{i,A} + 0,4 \cdot e_{i,B} \geq 0,4 \cdot e_{i,A} \quad (3.2)$$

sendo que o sinal de  $e_{i,B}$  é obtido com o mesmo raciocínio aplicado à determinação do coeficiente  $\alpha_b$ : positivo se  $M_B$  tracionar a mesma face que  $M_A$  e negativo em caso contrário, conforme figura 3.1.

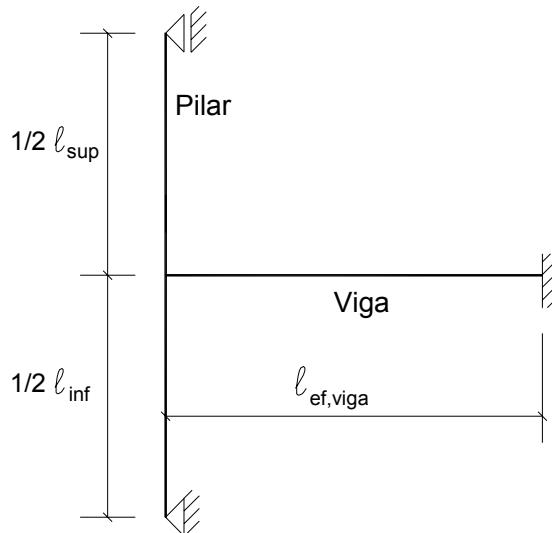


**Figura 3.1** - Excentricidades iniciais nas seções de extremidade e na seção intermediária

A NBR 6118:2003, embora não mencione explicitamente a excentricidade inicial a ser adotada para a seção intermediária, adota o mesmo procedimento anterior.

A NBR 6118:2003 indica processo simplificado para a obtenção dos esforços solicitantes iniciais, conceito que já foi estudado por ocasião da análise dos esforços solicitantes em vigas contínuas e é aqui recordado.

Quando não for realizado o cálculo exato dos esforços solicitantes na estrutura, permite-se, como simplificação, adotar o modelo estático indicado na figura 3.2 para a obtenção dos momentos fletores nos apoios extremos.



**Figura 3.2** - Modelo considerado nos casos de apoios extremos de vigas contínuas [NBR 6118:2003]

Os momentos solicitantes nos tramos superior e inferior do pilar são obtidos por:

$$M_{sup} = M_{eng} \cdot \left( \frac{r_{sup}}{r_{sup} + r_{inf} + r_{viga}} \right) \quad (3.3)$$

$$M_{\text{inf}} = M_{\text{eng}} \cdot \left( \frac{r_{\text{inf}}}{r_{\text{sup}} + r_{\text{inf}} + r_{\text{viga}}} \right) \quad (3.4)$$

sendo que  $M_{\text{eng}}$  é o momento de engastamento perfeito no tramo considerado (tramo de extremidade) da viga.

Os coeficientes de rigidez dos tramos superior e inferior do pilar e no tramo da viga, são definidos pelas relações entre momentos de inércia e vãos, conforme expressões 3.5:

$$r_{\text{sup}} = \frac{3 \cdot I_{\text{sup}}}{\frac{1}{2} \cdot \ell_{e,\text{sup}}} ; \quad r_{\text{inf}} = \frac{3 \cdot I_{\text{inf}}}{\frac{1}{2} \cdot \ell_{e,\text{inf}}} ; \quad r_{\text{viga}} = \frac{4 \cdot I_{\text{viga}}}{\ell_{\text{ef,viga}}} \quad (3.5)$$

Considerando o equilíbrio do nó, o momento fletor na viga é determinado por:

$$M_{\text{viga}} = M_{\text{sup}} + M_{\text{inf}} \quad (3.6)$$

O comprimento equivalente  $\ell_e$  do pilar pode ser determinado pela expressão 2.7.

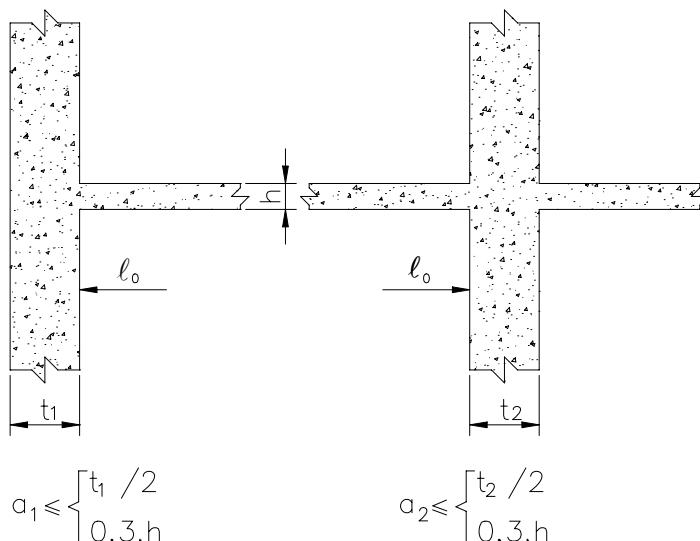
Os vãos efetivos das vigas podem ser calculados pela expressão:

$$\ell_{\text{ef,viga}} = \ell_0 + a_1 + a_2 \quad (3.6a)$$

Os valores de  $a_1$  e  $a_2$ , em cada extremidade do vão, podem ser determinados pelos valores apropriados de  $a_i$ , indicado na figura 3.2A, sendo:

$a_1$  igual ao menor valor entre  $(t_1/2)$  e  $0,3 \cdot h$ , e,

$a_2$  igual ao menor valor entre  $(t_2/2)$  e  $0,3 \cdot h$ .



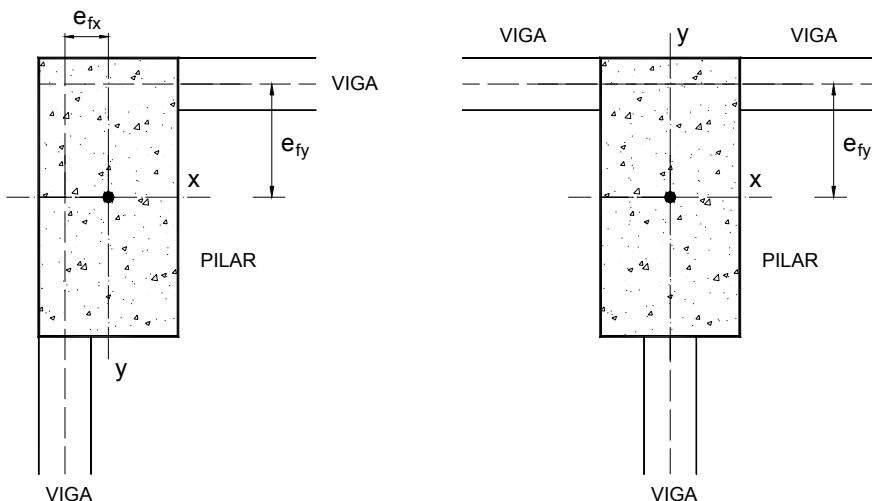
a) Apoio de vão extremo

b) Apoio de vão intermediário

**Figura 3.2A** - Vão efetivo de vigas [NBR 6118:2003]

### 3.2.2 Excentricidade de forma

Muitas vezes, para adequar a posição dos elementos estruturais em função do projeto arquitetônico, os projetistas estruturais precisam fazer coincidir as faces internas ou externas das vigas com as faces dos pilares que as apóiam. Quando tal procedimento é adotado, os eixos das vigas não passam pelo centro de gravidade da seção do pilar (figura 3.3), surgindo assim excentricidades denominadas *excentricidades de forma*.



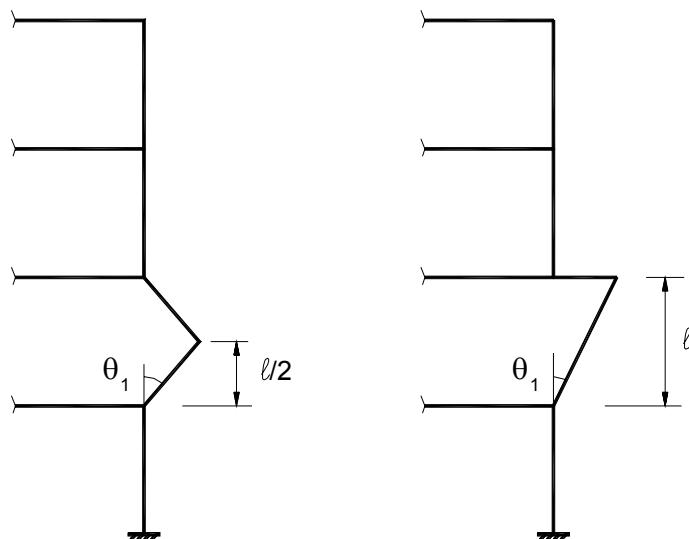
**Figura 3.3 - Excentricidades de forma em pilares [Aguiar (2000)].**

As excentricidades de forma, de maneira geral quando se fazem os projetos e estruturas de edifícios sem assistência de programas computacionais elaborados para este fim, não são consideradas no dimensionamento dos pilares. O momento fletor produzido pelas excentricidades no nível de cada andar é equilibrado por um binário, produzindo, em cada piso, pares de forças de sentidos contrários e de mesma ordem de grandeza, que tendem a se anular. No nível da fundação, a não consideração da excentricidade de forma se justifica pelas elevadas forças normais atuantes, cujos acréscimos de excentricidades são pequenos, não alterando os resultados do dimensionamento. No nível da cobertura, os pilares são poucos solicitados e dispõem de uma armadura mínima capaz de absorver o acréscimo de esforços causados pelas excentricidades de forma, não sendo necessário, portanto, considerá-la.

Programas computacionais elaborados para análise estrutural e dimensionamento com os critérios dos estados limites últimos e verificações de aberturas de fissuras e deslocamentos com os critérios dos estados limites de serviço, consideram as excentricidades de forma.

### 3.2.3 Excentricidade acidental

A NBR 6118:2003 prevê a consideração de uma *excentricidade acidental* ( $e_a$ ) para levar em conta as imperfeições locais por ocasião da construção dos pilares. As imperfeições podem ser a falta de retilinidade do eixo do pilar ou o desaprumo (figura 3.4). Admite-se que, nos casos usuais, a consideração apenas da falta de retilinidade do pilar é suficiente com relação a verificação da segurança estrutural.



Falta de retilinidade do pilar      b) Desaprumo do pilar

**Figura 3.4 - Consideração das imperfeições locais do pilar [NBR 6118:2003]**

sendo

$$\theta_1 = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\ell_e}} \geq \theta_{1,\min} \quad \text{com } \ell_e \text{ em metros;}$$

de tal modo que  $\theta_1$  não seja menor do que o ângulo  $\theta_{1,\min}$ , cujo valor é;

$$\theta_{1,\min} = \frac{1}{300} \text{ no caso de imperfeições locais como as dos tramos de pilares.}$$

A NBR 6118:2003 estabelece ainda que para o dimensionamento o momento total de primeira ordem, isto é, a soma dos momentos iniciais com os momentos produzidos pelas imperfeições geométricas locais, precisa respeitar o valor mínimo, dado por:

$$M_{1d,\min} = N_d \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h) = N_d \cdot e_{i,\min} \quad (3.8)$$

sendo:

$N_d$  é força normal de cálculo;

$h$  é a altura da seção transversal na direção considerada, em metros;

$e_{i,\min}$  a excentricidade mínima igual a  $0,015 + 0,03 \cdot h$ , em metros.

De acordo com a NBR 6118:2003, nas estruturas reticuladas usuais, admite-se que o efeito das imperfeições locais esteja atendido se for respeitado o valor do momento total mínimo. No caso de flexão composta oblíqua, o valor do momento mínimo precisa ser respeitado em cada uma das direções principais, separadamente.

### 3.2.4 Excentricidade de segunda ordem

A determinação dos efeitos locais de segunda ordem pode ser feita pelo método geral ou por métodos aproximados. Neste texto, somente é abordada a consideração dos efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem para os pilares medianamente esbeltos, empregando-se o *método do pilar padrão com curvatura aproximada* e o *método do pilar padrão com rigidez aproximada*.

Os pilares medianamente esbeltos correspondem a maioria das ocorrências em estruturas correntes de edifícios, sendo mais raros os casos de pilares com índices de esbeltez maiores do que 90.

#### a.- Método do pilar padrão com curvatura aproximada

Pode ser empregado no dimensionamento de pilares com  $\lambda \leq 90$ , com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do seu eixo. Este método aplica-se somente ao caso de flexão composta normal.

A não-linearidade geométrica é considerada de modo aproximado, supondo-se que a deformada da barra possa ser representada por uma curva senoidal. A não-linearidade física é considerada por uma expressão aproximada da curvatura na seção transversal que apresenta maior valor de momento fletor levando em conta os momentos de primeira e segunda ordens.

O momento total máximo no pilar, ou seja, a soma dos momentos de 1.<sup>a</sup> ordem com os momentos de 2.<sup>a</sup> ordem, é calculado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \cdot \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \geq M_{1d,A} \quad (3.9)$$

sendo,

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad \text{com} \quad v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad \text{e} \quad M_{1d,A} \geq M_{1d,min}$$

sendo,

$\alpha_b$  é o mesmo coeficiente definido no item 2.3;

$M_{1d,A}$  é o valor de cálculo do momento de 1º ordem  $M_A$ , definido no item 2.3;

$h$  é a altura da seção do pilar na direção analisada;

$v$  é a força normal adimensional;

$f_{cd}$  é a resistência a compressão de cálculo do concreto;

$M_{1d,min}$  tem o mesmo significado da expressão (3.8).

Portanto, partindo da segunda parcela da expressão (3.9), conclui-se que a excentricidade de 2.<sup>a</sup> ordem  $e_2$  assume o seguinte valor:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.10)$$

### b.- Método do pilar padrão com rigidez aproximada

O método pode ser empregado no dimensionamento de pilares com  $\lambda \leq 90$ , com seção constante e armadura simétrica e constante ao longo do seu eixo. Este método pode ser aplicado em pilares submetidos à flexão composta oblíqua, analisando-se cada uma das duas direções principais, simultaneamente.

A não-linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo-se que a deformada da barra seja senoidal. A não-linearidade física é considerada por uma expressão aproximada da rigidez.

O valor de cálculo do momento total máximo no pilar (soma do momento de 1º ordem com o momento de 2º ordem) pode ser calculado pela expressão:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \cdot M_{d1,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \cdot \frac{\kappa}{v}}} \geq \left\{ \begin{array}{l} M_{d1,A} \\ M_{1d,min} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

sendo  $\kappa$  a rigidez adimensional, calculada aproximadamente por:

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{M_{d,tot}}{h \cdot N_d} \right) \cdot v \quad (3.12)$$

As demais variáveis possuem o mesmo significado do método anterior. Usualmente, 2 ou 3 iterações são suficientes quando se optar por um processo iterativo.

É possível considerar uma solução única para cálculo do  $M_{d,tot}$ , portanto sem a necessidade de iterações, usando a expressão 3.13, resultante da substituição da expressão 3.12 em 3.11.

$$19200 \cdot M_{d,tot}^2 + [3840 \cdot h \cdot N_d - \lambda^2 \cdot h \cdot N_d - 19200 \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A}] \cdot M_{d,tot} - 3840 \cdot \alpha_b \cdot h \cdot N_d \cdot M_{1d,A} = 0 \quad (3.13)$$

Considerando a expressão 2.8, pode-se escrever:

$$\lambda^2 = \frac{\ell_e^2 \cdot 12}{h^2} \quad (3.14)$$

Substituindo a 3.14 em 3.13 obtem-se a equação de segundo grau 3.15 cuja incógnita é o valor do momento fletor total, que considera os momentos fletores de primeira e segunda ordens.

$$5 \cdot h \cdot M_{d,tot}^2 + [h^2 \cdot N_d - \ell^2 \cdot N_d \cdot \frac{1}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A}] \cdot M_{d,tot} - h^2 \cdot N_d \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} = 0 \quad (3.15)$$

Fazendo:

$$a = 5 \cdot h ;$$

$$b = h^2 \cdot N_d - \frac{\ell^2 \cdot N_d}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{ld,A};$$

$$c = -h^2 \cdot N_d \cdot \alpha_b \cdot M_{ld,A};$$

resulta a equação de segundo grau 3.16

$$a \cdot M_{d,tot}^2 + b \cdot M_{d,tot} + c = zero \quad (3.16)$$

que permite calcular o valor de  $M_{d,tot}$  quando se adota o método do pilar padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada.

**c.-** Método do pilar padrão para pilares da seção retangular submetidos à flexão oblíqua composta

Quando a esbeltez de um pilar de seção retangular submetido à flexão composta oblíqua for menor que 90 ( $\lambda < 90$ ) nas duas direções principais, precisa ser aplicado o processo aproximado do pilar padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada em cada uma das duas direções.

A amplificação dos momentos de 1ª ordem em cada direção é diferente, pois depende de valores distintos de rigidez e esbeltez.

Uma vez obtida a distribuição de momentos totais, de primeira e segunda ordem, em cada direção, deve ser verificada, para cada seção ao longo do eixo, se a composição desses momentos solicitantes fica dentro da envoltória de momentos resistentes para a armadura escolhida. Essa verificação pode ser realizada em apenas três seções: nas extremidades A e B e num ponto intermediário onde se admite atuar concomitantemente os momentos  $M_{d,tot}$  nas duas direções (x e y).

### 3.2.5 Excentricidade causada pela fluência

A excentricidade causada pela fluência do concreto  $e_c$  deve ser considerada em pilares com  $\lambda > 90$ , ou seja, nos pilares esbeltos e muitos esbeltos. Os efeitos da fluência podem ser desprezados em pilares com índices de esbeltez menores que 90.

Embora a avaliação precisa dos efeitos da fluência seja uma tarefa complexa, a NBR 6118:2003 apresenta uma expressão simplificada para o cálculo da excentricidade  $e_c$ , dada a seguir:

$$e_c = \left( \frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \cdot \left( 2,718^{\frac{\varphi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right) \quad (3.13)$$

sendo

$M_{sg}$  e  $N_{sg}$  os esforços solicitantes no pilar obtidos com combinação quase-permanente;

$e_a$  é a excentricidade accidental;

$\varphi$  é o coeficiente de fluência;

$$N_e = \frac{10 \cdot E_{ci} \cdot I_c}{\ell_e^2};$$

$E_{ci} = 5.600 \cdot f_{ck}^{0,5}$  é o módulo de elasticidade inicial do concreto;

$I_c$  é o momento de inércia da seção do pilar;

$\ell_e$  é o comprimento equivalente do tramo de pilar.

A excentricidade  $e_c$  calculada na expressão (3.13) precisa ser somada à excentricidade de 1.<sup>a</sup> ordem.

### 3.3 Situações de projeto e de cálculo

As situações de projeto dos pilares dependem apenas de sua posição em relação à estrutura e dos esforços iniciais nos mesmos. Portanto, conforme mencionado no item 2.1, a situação de projeto dos pilares intermediários é de compressão centrada, dos pilares de extremidade é de flexão normal composta e dos pilares de canto é de flexão oblíqua composta.

Nas situações de cálculo, ou seja, as admitidas para o dimensionamento, além das excentricidades iniciais da situação de projeto, devem estar consideradas as excentricidades que levam em conta efeitos adicionais, tais como as imperfeições geométricas, os efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem e os efeitos da fluência do concreto.

#### 3.3.1 Seção de extremidade e seções intermediárias de pilares

No dimensionamento, além das seções das extremidades, também precisam ser analisadas as seções intermediárias do pilar.

Para compreender as diferentes situações em que se encontram essas duas seções, pode-se partir de uma estrutura de nós indeslocáveis, onde os nós extremos de um pilar não têm deslocamentos horizontais, pois os mesmos podem ser considerados fixos nas vigas dos pavimentos. Os pavimentos constituídos por lajes e vigas funcionam como um diafragma horizontal impedindo, assim, os deslocamentos no seu plano.

Entretanto, em uma seção intermediária do pilar, existem deslocamentos de 2.<sup>a</sup> ordem, que precisam ser considerados no projeto (figura 3.6). Por outro lado, as excentricidades iniciais nas seções intermediárias são menores que as das seções extremas (pois os momentos solicitantes são menores).

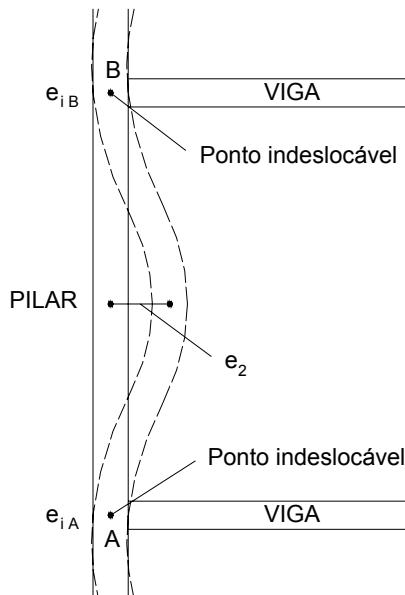
As situações de cálculo nas seções de extremidade e na seção intermediária precisam ser consideradas separadamente, as resistências destas seções precisam ser verificadas separadamente e a áreas de armadura das seções transversais são as maiores entre as verificações das várias seções.

#### Pilares curtos: $\lambda \leq \lambda_1$

Quando  $\lambda < \lambda_1$ , os efeitos locais de 2<sup>o</sup> ordem podem ser desprezados na direção em questão. Somando-se a excentricidade inicial e a relativa à falta de retilinidade, geram-se as situações de cálculo indicadas na figura 3.6.

### Pilares medianamente esbeltos: $\lambda_1 < \lambda \leq 90$

Nos casos de projetos de pilares em  $\lambda > \lambda_1$ , os efeitos locais de segunda ordem precisam ser obrigatoriamente considerados. A determinação dos efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem pode ser feita por métodos aproximados, como o *método do pilar padrão*. Os efeitos da fluência do concreto podem ser desprezados nos pilares medianamente esbeltos ( $\lambda_1 < \lambda \leq 90$ ). A excentricidade de segunda ordem pode ser vista na figura 3.5.



**Figura 3.5** - Excentricidades iniciais e de segunda ordem em pilares  
 [Carvalho & Figueiredo Filho, 2002]

Lembra-se, novamente, que nas seções de extremidade não se incluem os efeitos de 2º ordem, devendo considerá-los apenas na seção intermediária.

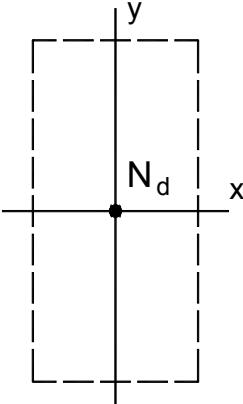
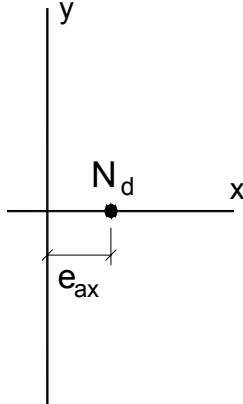
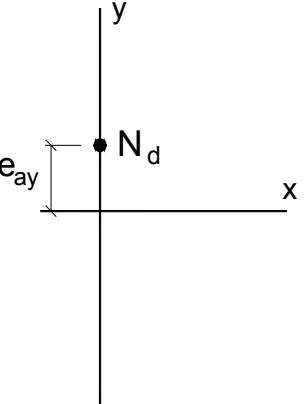
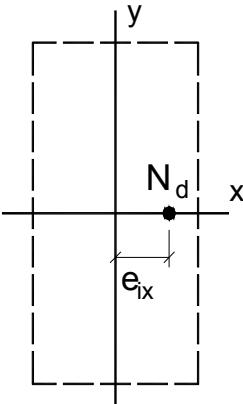
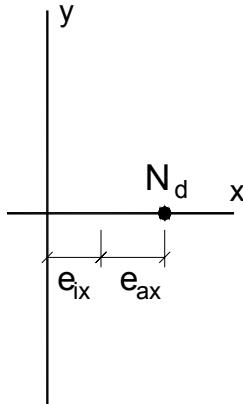
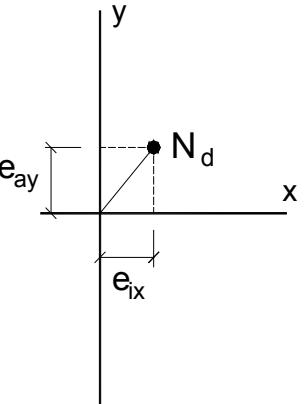
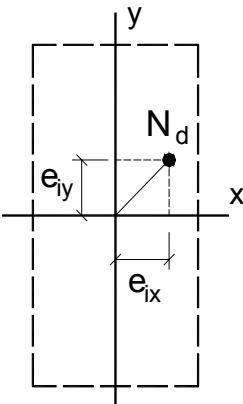
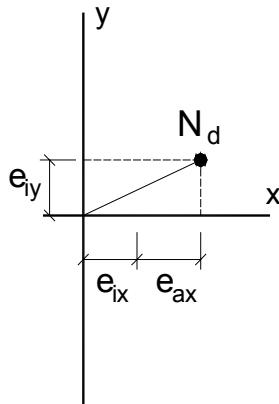
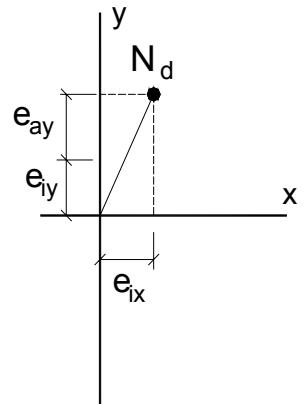
Somando as excentricidades, geram-se as situações de cálculo da figura 3.7.

### Pilares esbeltos: $90 < \lambda \leq 140$

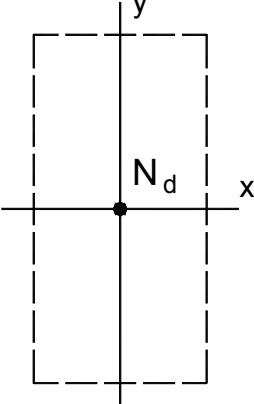
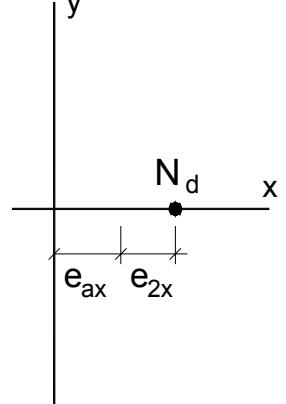
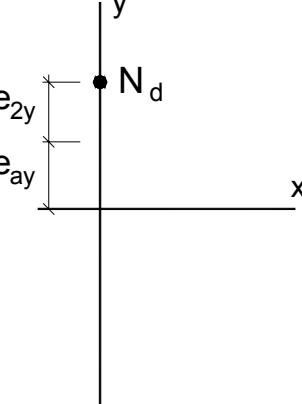
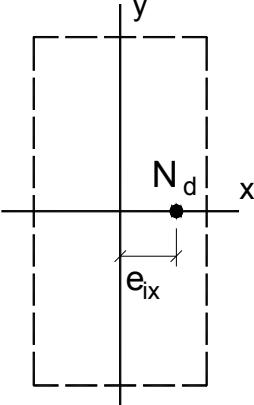
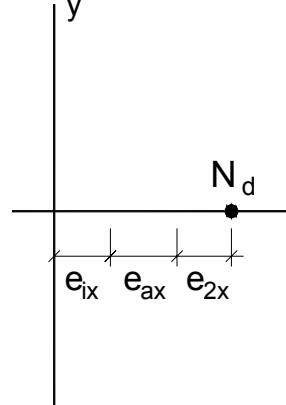
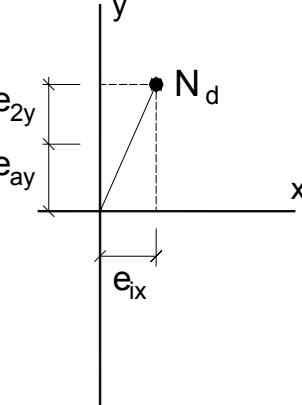
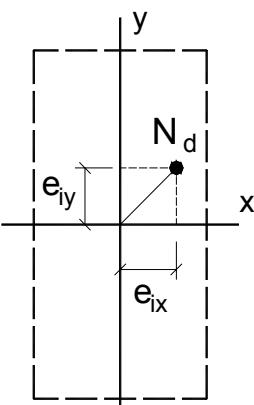
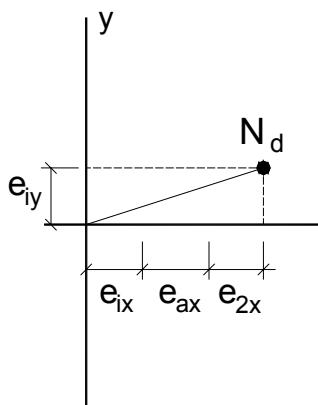
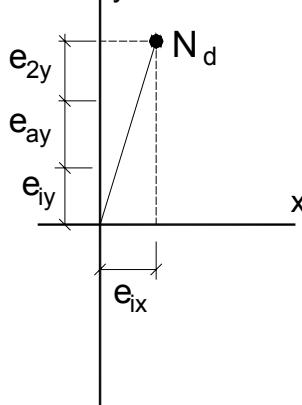
Para  $\lambda \geq 90$  é obrigatória a consideração dos efeitos da fluência do concreto, efetuada por meio de uma excentricidade  $e_c$ . A determinação dos efeitos locais de 2º ordem pode ser feita pelo método do pilar padrão ou pilar padrão melhorado, utilizando-se para a curvatura da seção crítica valores obtidos dos diagramas de momento fletor, força normal e curvatura específica para o caso.

### Pilares muito esbeltos: $140 < \lambda \leq 200$

Uma classificação adicional pode ser feita para pilares que apresentam índices de esbeltez compreendidos entre  $140 < \lambda \leq 200$ , denominados *muito esbeltos*. Neste caso, para a consideração dos efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem, deve-se recorrer ao *Método Geral*, que consiste na análise não-linear de 2.<sup>a</sup> ordem efetuada com discretização adequada da barra, considerando a relação momento-curvatura real em cada seção e a não-linearidade geométrica de maneira não aproximada.

	SITUAÇÃO DE PROJETO	SITUAÇÕES DE CÁLCULO - Seções intermediárias	
Pilares intermediários	 Compressão centrada	 Flexão normal composta	 Flexão normal composta
Pilares de extremidade	 Flexão normal composta	 Flexão normal composta	 Flexão oblíqua composta
Pilares de canto	 Flexão oblíqua composta	 Flexão oblíqua composta	 Flexão oblíqua composta

**Figura 3.6:** Situação de projeto e de cálculo em pilares curtos – seções intermediárias

	SITUAÇÃO DE PROJETO	SITUAÇÕES DE CÁLCULO - Seções intermediárias	
Pilares intermediários	 Compressão centrada	 Flexão normal composta	 Flexão normal composta
Pilares de extremidade	 Flexão normal composta	 Flexão normal composta	 Flexão oblíqua composta
Pilares de canto	 Flexão oblíqua composta	 Flexão oblíqua composta	 Flexão oblíqua composta

**Figura 3.7:** Situação de projeto e de cálculo em pilares medianamente esbeltos – seções intermediárias

## 4. Detalhamento de pilares de concreto armado

### 4.1 Dimensões mínimas dos pilares

A NBR 6118:2003 estabelece que a menor dimensão da seção transversal do pilar não deve ser inferior a 19cm. Esta recomendação visa evitar um comportamento inaceitável para os elementos estruturais e propiciar condições adequadas de construção.

Em casos especiais, permite-se que a menor dimensão do pilar esteja compreendida entre 19cm e 12cm. Nestes casos, é preciso multiplicar os esforços finais de cálculo empregados no dimensionamento dos pilares por um coeficiente adicional  $\gamma_n$ , de acordo com a tabela 4.1:

**Tabela 4.1 - Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$**

Menor dimensão da seção do pilar (cm)								
Menor dimensão	≥ 19	18	17	16	15	14	13	12
Valor de $\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35

### 4.2 Armaduras longitudinais

#### 4.2.1 Taxa geométrica mínima e máxima

Inicialmente, define-se *taxa geométrica* de armadura longitudinal do pilar pela seguinte relação:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (4.1)$$

sendo  $A_s$  a soma das áreas das seções transversais das barras longitudinais e  $A_c$  é a área da seção transversal do pilar.

De acordo com as recomendações da NBR 6118:2003, a área mínima de armadura longitudinal, que depende da resistência do aço e da intensidade da solicitação em virtude da força normal, é determinada pela seguinte expressão:

$$A_{s,min} = 0,15 \cdot \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 \cdot A_c = 0,4\% \cdot A_c \quad (4.2)$$

Portanto, a taxa geométrica mínima de armadura é igual a 0,4%.

A maior área de armadura possível em pilares, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura em regiões de emenda, deve ser de 8% da área da seção transversal, ou seja:

$$A_{s,max} = 8\% \cdot A_c$$

Nas regiões fora das emendas por traspasse a taxa de armadura longitudinal fica igual a 4%, pois, nas regiões de emendas têm-se o dobro do número de barras.

A taxa geométrica de armadura máxima em pilares de concreto armado é de 4%, nas regiões fora das emendas por traspasse.

#### 4.2.2 Diâmetro mínimo das barras

O diâmetro mínimo das barras longitudinais não pode ser inferior a 10 mm e também não pode ser superior a 1/8 da menor dimensão da seção do pilar.

#### 4.2.3 Distribuição das armaduras longitudinais na seção do pilar

A NBR 6118:2003 prescreve que as barras longitudinais devem ser posicionadas ao redor da periferia da seção, de forma a garantir a adequada resistência do elemento estrutural.

Em seções poligonais, dentre as quais estão incluídas as seções retangulares, precisa existir pelo menos uma barra em cada canto ou vértice do polígono. Em seções circulares, deve existir pelo menos seis barras, distribuídas ao longo do perímetro.

#### 4.2.4 Espaçamento livre entre as barras das armaduras

Para garantir adequada concretagem é necessário que o concreto tenha um mínimo de espaço para passar entre as armaduras longitudinais. Por esse motivo impõem-se limitações ao espaçamento livre entre as barras da armadura longitudinal ( $a_L$ ), o qual precisa ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- 20 mm;
- a medida do diâmetro da barra, do feixe ou da luva adotada na emenda;
- 1,2 vez o diâmetro máximo do agregado.

#### 4.2.5 Espaçamento máximo entre eixos das armaduras

O espaçamento máximo entre os eixos das barras da armadura também é limitado, precisando ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão do pilar, sem exceder a 400mm.

### 4.3 Armaduras transversais

#### 4.3.1 Diâmetro dos estribos

O diâmetro dos estribos ( $\phi_t$ ) em pilares não pode ser inferior a 5 mm ou 1/4 do diâmetro da barra longitudinal.

#### 4.3.2 Espaçamento longitudinal entre os estribos

A fim de garantir o posicionamento das barras da armadura longitudinal e, também, impedir a flambagem das barras longitudinais e servir de armadura de costura nas regiões de emendas, são recomendados espaçamentos máximos entre os estribos (medido na direção do eixo do pilar), devendo ser igual ou inferior ao menor dos seguintes valores:

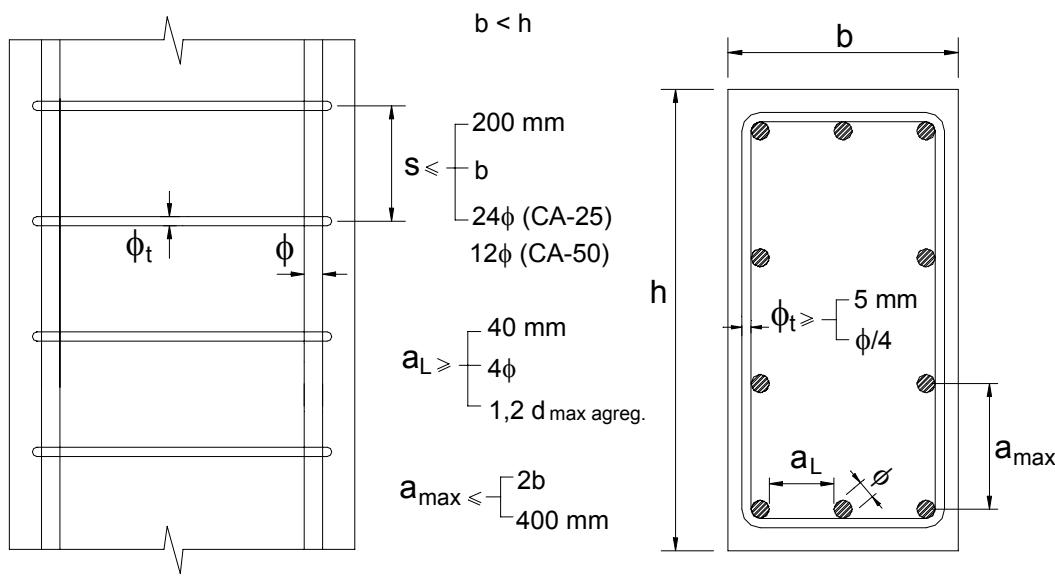
- 200 mm;
- menor dimensão da seção;

- 24  $\phi$  para aço CA-25 e 12 $\phi$  para aço CA-50, onde  $\phi$  é o diâmetro da barra longitudinal.

Os estribos podem apresentar diâmetro  $\phi_t$  menor do que  $\phi_{lon}/4$  desde que as armaduras sejam constituídas do mesmo tipo de aço e o espaçamento longitudinal respeite também a seguinte limitação:

$$s_{\max} = 9000 \cdot \left( \frac{\phi_t^2}{\phi} \right) \cdot \frac{1}{f_{yk}} \quad (4.3)$$

A figura 4.1 indica, resumidamente, os valores dos espaçamentos máximos e mínimos das armaduras transversais e longitudinais recomendados pela NBR 6118:2003.

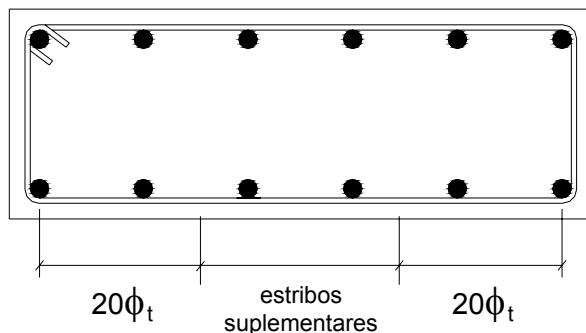


**Figura 4.1** - Resumo das principais recomendações da revisão da norma brasileira a respeito do espaçamento das armaduras em pilares

#### 4.3.3 Proteção contra a flambagem das barras longitudinais

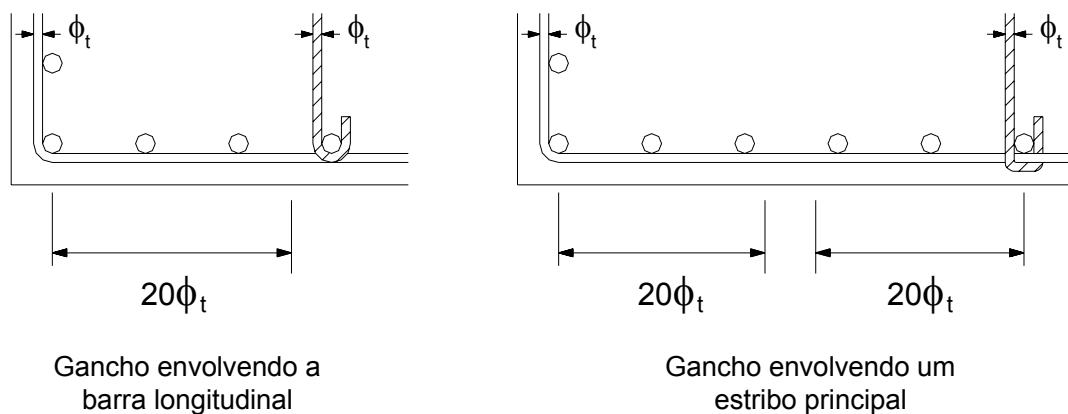
Sempre que houver possibilidade de flambagem das barras junto à superfície, devem precisar ser tomadas precauções para evitá-la.

Segundo a NBR 6118:2003, os estribos poligonais impedem a flambagem das barras longitudinais situadas em seus cantos e as por eles abrangidas, situadas no máximo à distância de  $20\phi_t$  do canto, desde que nesse trecho de comprimento  $20\phi_t$  não existam mais de duas barras, não contando a do canto. Quando houver mais de duas barras no trecho de comprimento  $20\phi_t$  ou barras fora dele, deve haver estribos suplementares.



**Figura 4.2** - Proteção contra a flambagem das barras longitudinais

Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos, ele deve atravessar a seção do elemento estrutural e os seus ganchos devem envolver a barra longitudinal. Se houver mais de uma barra longitudinal a ser protegida junto à extremidade do estribo suplementar, seu gancho deve envolver um estribo principal em ponto junto a uma das barras, o que deverá ser indicado no projeto de modo bem destacado (figura 4.3).



**Figura 4.3:** Forma de posicionar os ganchos dos estribos suplementares

#### 4.4 Emenda das barras longitudinais do pilar

Em função do processo construtivo empregado para execução dos pilares, as barras longitudinais desses elementos precisam ser emendadas ao longo de seu comprimento. As emendas das barras podem ser: por traspasse; por luvas com preenchimento metálico ou rosqueadas; por solda.

A emenda por traspasse é empregada por seu menor custo, além da facilidade na montagem das barras da armadura na construção.

A NBR 6118:2003 recomenda que a emenda por traspasse seja evitada para diâmetros de barras maiores que 32mm.

O comprimento de traspasse nas barras longitudinais comprimidas é determinado pela seguinte expressão:

$$\ell_{0c} = \ell_{b,nec} \geq \ell_{0c,min} \quad (4.4)$$

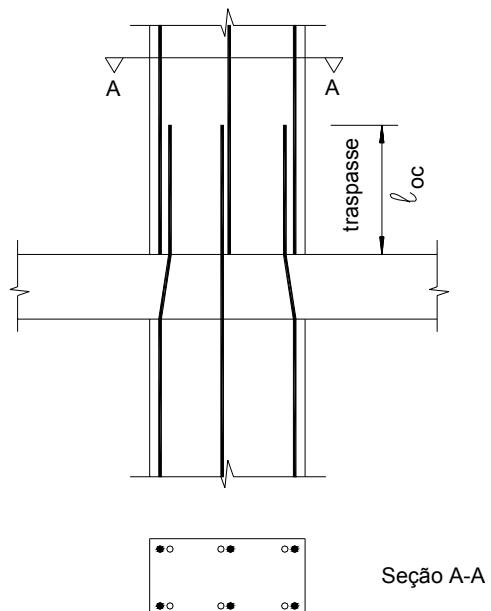
sendo que:

$\ell_{b,nec}$  é o comprimento de ancoragem necessário;

$\ell_{0c,\min}$  é o maior valor entre  $0,6 \cdot \ell_b$ ,  $15\phi$  e 200mm;

$\ell_b$  é o comprimento de ancoragem básico.

A figura 4.4 contém um exemplo de emenda por traspasse em pilares de seção constante, onde as barras longitudinais do pilar inferior são interrompidas a uma altura acima da face superior da viga ou laje igual ao comprimento de traspasse.



**Figura 4.4:** Emendas por traspasse das barras longitudinais dos pilares

## 5. Exemplos de projeto de pilares

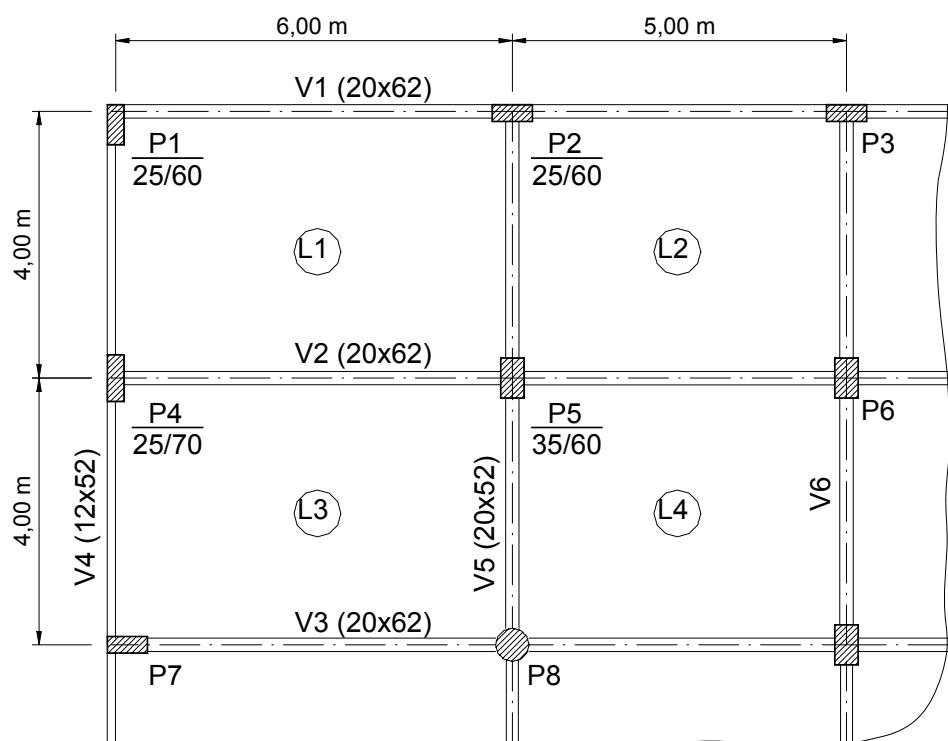
(14 de fevereiro de 2008)

Neste item apresentam-se exemplos de dimensionamento de pilares de concreto armado seguindo as recomendações da NBR 6118:2003. Desenvolveu-se um exemplo para cada tipo de pilar quanto à sua posição geométrica na forma do pavimento-tipo: pilar interno, pilar de extremidade e pilar de canto.

O projeto de edifício considerado é o analisado por Fusco (1981), porém atualizado com os critérios da NBR 6118:2003 [ABNT, 2004].

A figura 5.1 ilustra a planta de forma do pavimento tipo e a tabela 1 fornece os dados necessários para os cálculos e detalhamentos das áreas das armaduras.

Os pilares a serem projetados são: o P5 que é um pilar que pode ser considerado submetido à força normal, não sendo considerados os momentos fletores atuantes em função da ligação do pilar com as vigas V2 e V5; o pilar P4 submetido à ação de força normal calculada considerando-se as reações de apoio das vigas V2 e V4; e, o pilar P1 submetido à flexão composta oblíqua, por ser um pilar de canto e, portanto, submetido à força centrada e momentos fletores em duas direções principais em virtude da ligação deste com as vigas V1 e V4.



**Figura 5.1:** Forma do pavimento tipo [Fusco (1981)]

**Tabela 01** - Dados para os projetos dos pilares do exemplo de edifício

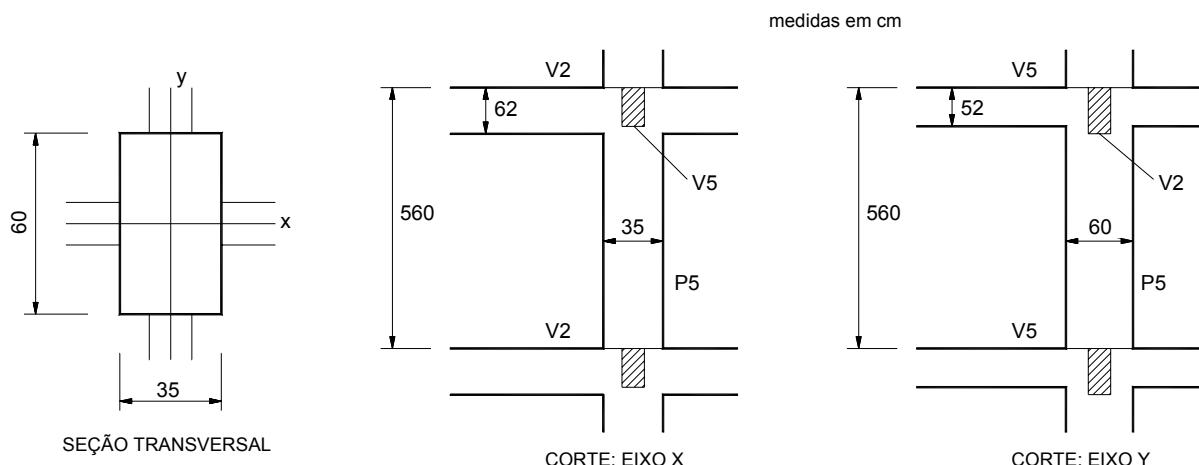
Materiais	Cobrimento	Força normal	Ações nas vigas
Concreto C30	2,5 cm	P5: $N_k = 2.720 \text{ kN}$ P4: $N_k = 1.670 \text{ kN}$ P1: $N_k = 1.230 \text{ kN}$	V2: $(g+q)_k = 19 \text{ kN/m}$ V1: $(g+q)_k = 20 \text{ kN/m}$ V4: $(g+q)_k = 16 \text{ kN/m}$
Aço CA-50			

Nestes exemplos, para a determinação dos efeitos de 2.<sup>a</sup> ordem, emprega-se o método do pilar padrão com curvatura aproximada no projeto do pilar P4 submetido a ações relativas à flexão normal composta. No caso do pilar P1 com ações atuantes que geram flexão oblíqua composta considera-se o método do pilar padrão com rigidez aproximada. No projeto do pilar P5, submetido a força centrada na situação de projeto,

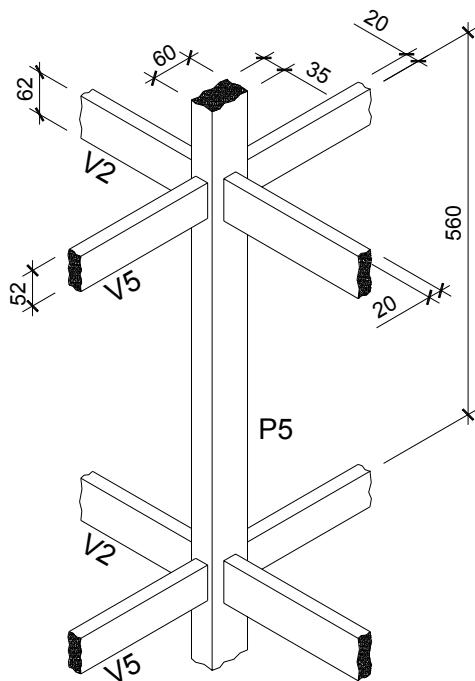
por se tratar de pilar interno, também se considera o método do pilar padrão com curvatura aproximada.

### 5.1 Exemplo 1: pilar interno – P5

Para o pilar interno P5, indicado na figura 5.1, considera-se que a distância vertical entre os níveis dos pavimentos seja de 5,60 metros, conforme Fusco (1981). A figura 5.2 indica essa medida.



**a - Seção transversal e cortes paralelos aos eixos x e y do pilar P5**



**b - Perspectiva do pilar P5 e respectivas vigas - tipo**

**Figura 5.2 - Condições geométricas do pilar P5**

As forças normais característica e de cálculo atuantes no pilar P5, de acordo com o projeto, são iguais a:

$$N_k = 2.720\text{kN}$$

$$N_d = 1,4 \times 2.720 = 3.808\text{kN}$$

### 5.1.1 Excentricidades iniciais

Nas seções de extremidade - topo e base do pilar - e intermediária, nas duas direções x e y, as excentricidades são iguais a zero, pois se trata de um pilar interno, assim têm-se:

$$e_{iA} = e_{iB} = e_{iC} = 0$$

### 5.1.2 Cálculo dos comprimentos equivalentes do pilar P5

Para os cálculos dos comprimentos equivalentes do pilar P5, nas direções x e y, consideram-se as expressões 2.7, indicadas pela NBR 6118:2003, e o que é mostrado na figura 2.3 e na planta de forma da figura 5.1 e na figura 5.2.

Na direção do eixo x a distância entre as faces das vigas V2 em dois andares seqüentes é igual a:

$$\ell_{ox} = 560 - 62 = 498\text{cm}$$

O comprimento equivalente na direção do eixo x é a menor das medidas entre a distância livre acrescida da medida do lado do pilar na direção x e a distância entre os centros das vigas-tipo V2 entre dois andares, resultando:

$$\ell_{ex} = \ell_{ox} + h_x = 498 + 35 = 533\text{cm}$$

$$\ell_x = 560\text{cm}$$

ou seja:

$$\ell_{ex} = 533\text{cm}$$

Analogamente para o comprimento equivalente do pilar P5 na direção do eixo y, tem-se:

$$\ell_{ey} = \ell_{oy} + h_y = 508 + 60 = 568\text{cm}$$

$$\ell_y = 560\text{cm}$$

portanto:

$$\ell_{ey} = 560\text{cm}$$

### 5.1.3 Cálculo dos índices de esbeltez

O cálculo dos índices de esbeltez nas direções x e y são calculados com as expressões indicadas em 2.6 e com  $\ell_{ex}$  e  $\ell_{ey}$  calculados em 5.1.2.

Considerando o eixo x obtem-se:

$$\lambda_x = \frac{\ell_{ex}}{i_x} = \frac{\ell_{ex} \cdot \sqrt{12}}{h_x} = \frac{533 \cdot \sqrt{12}}{35} = 52,8$$

É preciso comparar esse valor de  $\lambda_x$  com o índice de esbeltez de referência  $(\lambda_1)_x$ .

Para cálculo do índice de esbeltez de referência usa-se a expressão 2.1 com  $\alpha_b$  avaliado para cada direção.

Na direção do eixo x tem-se  $\alpha_{bx} = 1,0$ , pois os momentos atuantes nas extremidades - topo e base – do tramo do pilar P5 são iguais a zero e menores que o momento mínimo.

Portanto,  $(\lambda_1)_x$  resulta:

$$(\lambda_1)_x = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{ix}}{h_x}}{\alpha_{bx}} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{0}{35}}{1,0} = 25$$

É preciso considerar que a NBR 6118:2003 indica que  $35 \leq \lambda_1 \leq 90$ . Portanto  $(\lambda_1)_x = 35$ .

Como  $\lambda_x = 52,8 > (\lambda_1)_x = 35$  entende-se que se trata de um pilar medianamente esbelto na direção x, sendo necessário considerar-se na direção do eixo x o efeito do momento de segunda ordem causado pelas deformações das seções transversais.

Na direção do eixo y o índice de esbeltez, com  $\ell_{ey}$  igual a 560cm e  $h_y$  igual a 60cm resulta:

$$\lambda_y = \frac{\ell_{ey}}{i_y} = \frac{\ell_{ey} \cdot \sqrt{12}}{h_y} = \frac{560 \cdot \sqrt{12}}{60} = 32,3$$

O valor de  $\alpha_{by}$  é igual a 1,0, pois os momentos nas extremidades do tramo de pilar são iguais a zero e menores que o momento mínimo a ser considerado em todos os projetos de pilares segundo a NBR 6118:2003.

$$(\lambda_1)_y = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{iy}}{h_y}}{\alpha_{by}} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{0}{60}}{1,0} = 25$$

Portanto, resulta  $(\lambda_1)_y = 35$  posto que seja maior do que o valor calculado de 25.

Considerando que  $\lambda_y = 32,3 < (\lambda_1)_y = 35$  vê-se que o pilar é considerado curto na direção y, não havendo necessidade de se considerar o efeito de segunda ordem nesta direção y.

#### 5.1.4 Cálculo das excentricidades acidentais

Como já estudado a NBR 6118:2003 indica a consideração de uma excentricidade acidental por falta de retilinidade do pilar durante a sua construção, na seção intermediária, calculada com as expressões 3.7, de acordo com a figura 3.4, resultando para a direção do eixo x:

$$\theta_{1x} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\ell_{ex}}} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{5,33}} = 0,00433\text{rad}$$

que é maior do que

$$\theta_{1,min} = \frac{1}{300} = 0,00333\text{rad}$$

Portanto a excentricidade accidental na direção do eixo x resulta igual a:

$$e_{ax} = 0,00433 \cdot \frac{533}{2} = 1,15\text{cm}$$

Analogamente, na direção do eixo y a excentricidade accidental resulta:

$$\theta_{1y} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\ell_{ey}}} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{5,60}} = 0,00423\text{rad} > \theta_{1,min} = \frac{1}{300} = 0,00333$$

$$e_{ay} = 0,00423 \cdot \frac{560}{2} = 1,18\text{cm}$$

### 5.1.5 Cálculo das excentricidades mínimas

A NBR 6118:3003 indica, como já estudado no item 3.2.3, a consideração de um valor de  $M_{d1,min}$  calculado com a expressão 3.8, resultando na direção do eixo x:

$$(e_{1,min})_x = 0,015 + 0,03 \cdot h_x = 0,015 + 0,03 \cdot 0,35 = 0,0255\text{m} = 2,55\text{cm}$$

Analogamente, na direção do eixo y, resulta:

$$(e_{1,min})_y = 0,015 + 0,03 \cdot h_y = 0,015 + 0,03 \cdot 0,60 = 0,0330\text{m} = 3,30\text{cm}$$

Como devem prevalecer os maiores valores das excentricidades mínimas e accidentais por causa da falta de retilinidade, nas seções de extremidade - topo e base - e na seção intermediária, têm-se as excentricidades de primeira ordem:

$$e_{1x} = 2,55\text{cm} > e_{ax} = 1,15\text{cm}$$

$$e_{1y} = 3,30\text{cm} > e_{ay} = 1,18\text{cm}$$

### 5.1.6 Cálculo das excentricidades de segunda ordem

O cálculo da excentricidade de segunda ordem, relativa à seção intermediária na direção do eixo x, é feito com as expressões do item 3.2.4a, deduzidas com base no Método do pilar padrão com curvatura aproximada, como indicado na NBR 6118:2003.

A excentricidade de segunda ordem é calculada por:

$$e_{2x} = \frac{\ell_{ex}^2}{10} \cdot \frac{1}{r}$$

Seguindo a rotina indicada no item 3.2.4a calculam-se:

a.- resistência de cálculo à compressão do concreto

$$f_{cd} = \frac{3,0}{1,4} = 2,14 \text{ kN/cm}^2$$

b.- força normal reduzida

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{3.808}{(35 \cdot 60) \cdot 2,14} = 0,85$$

c.- curvatura da deformada em virtude das deformações de segunda ordem

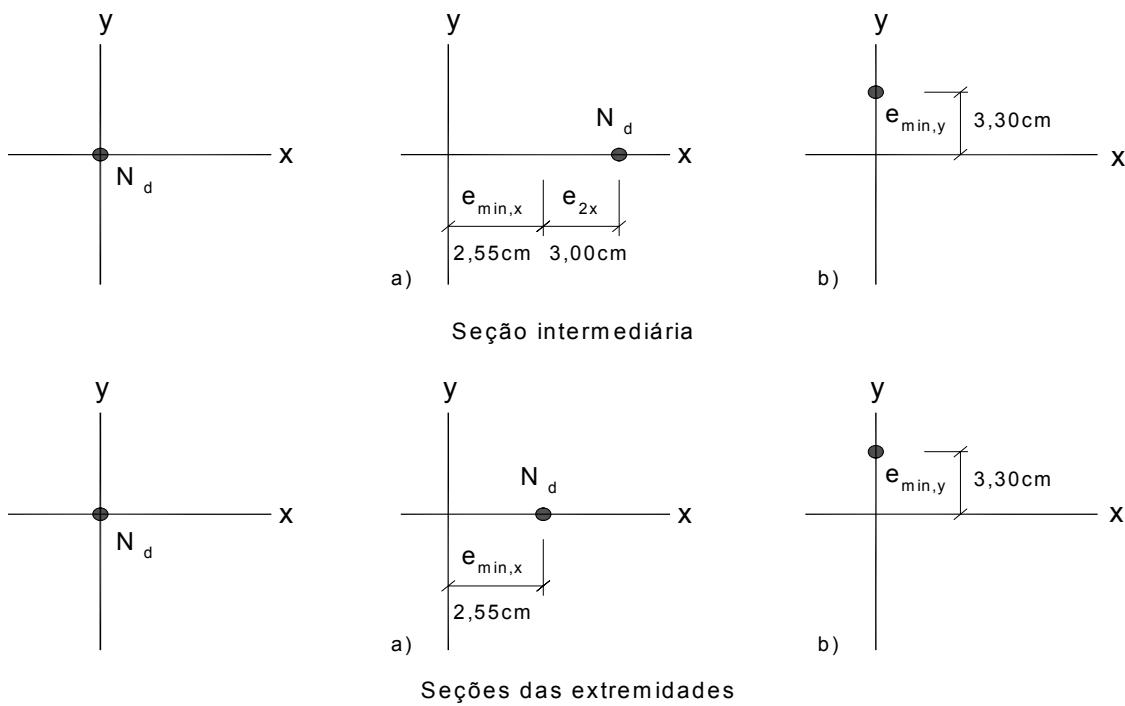
$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h_x \cdot (\nu + 0,5)} = \frac{0,005}{35 \cdot (0,85 + 0,5)} = 10,58 \cdot 10^{-5} < \frac{0,005}{h_x} = 14,3 \cdot 10^{-5}$$

d.- excentricidade de segunda ordem na direção do eixo x

$$e_{2x} = \frac{533^2}{10} \cdot 10,58 \cdot 10^{-5} = 3,00 \text{ cm}$$

#### 5.1.7 Situações de projeto e de cálculo

Para que as situações de cálculo fiquem definidas para permitir os cálculos das áreas das armaduras é preciso desenhar as situações de projeto, relativas às posições do pilar em relação à forma do pavimento tipo. A figura 5.3 mostra as situações de projeto e de cálculo do pilar P5.



Situações de projeto

Situações de cálculo

**Figura 5.3** - Situações de projeto e de cálculo do pilar P5

O arranjo final da armadura longitudinal é adotado para a situação mais desfavorável.

Para os cálculos das áreas das armaduras utilizam-se os ábacos de Venturini (1987) para a flexão normal composta.

### 5.1.8 Cálculo das áreas das armaduras

É preciso considerar-se as situações a – direção do eixo x e situação b – direção do eixo y das seções de extremidades, topo e base, e intermediária indicadas na Figura 5.3.

#### 5.1.8.1 Situação a – direção x

Analizando as medidas das excentricidades nas seções intermediária e de topo e base percebe-se que o valor maior é o que ocorre na seção intermediária, onde se tem as excentricidades mínima e de segunda ordem, sendo que na seção de topo e base tem-se apenas a excentricidade mínima, que leva em conta a excentricidade acidental.

Para o cálculo da área das barras longitudinais é preciso determinar:

a.- Relação entre a distância do centro das barras da armadura e a medida do lado da seção transversal na direção considerada - x

$$\frac{d_x}{h_x} = \frac{4,0}{35} = 0,11 \approx 0,10$$

b.- Excentricidade total na direção x

De acordo com a figura 5.3 tem-se

$$e_x = 2,55 + 3,00 = 5,55\text{cm}$$

c.- Valor da força normal reduzida

$$v_d = 0,85$$

d.- Cálculo do momento fletor reduzido na direção do eixo x

$$\mu_{dx} = v_d \cdot \frac{e_x}{h_x} = 0,85 \cdot \frac{5,55}{35} = 0,13$$

e.- Cálculo da área das barras da armadura longitudinal para a situação a – seção intermediária

Para o cálculo da área das barras da armadura para a situação a, neste caso de flexão composta normal escolhe-se um arranjo de barras distribuídas preponderantemente nos lados paralelos a  $h_y$  da seção transversal, pois está sendo considerado momento fletor com plano de ação paralelo ao lado  $h_x$ .

Assim, escolhe-se, inicialmente, o ábaco A-2 [Venturini, 1987], para  $d'_x/h_x = 0,10$ , que, como pode ser observado, resultou a taxa geométrica de armadura igual a:

$$\omega = 0,36$$

A área das barras é igual a:

$$A_s = \frac{\omega \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,36 \cdot (35 \cdot 60) \cdot 2,14}{43,5} = 37,19 \text{ cm}^2$$

Escolhendo-se barras de diâmetro de 20,0mm, cuja área é igual a 3,14cm<sup>2</sup>, resulta como área efetiva, para esta primeira avaliação da área das barras longitudinais do pilar P5, o valor:

$$A_{s,efe} = 37,68 \text{ cm}^2$$

que é representada por 12 φ 20,0mm distribuídas paralelamente ao lado y, segundo o considerado no ábaco A-2 [Venturini, 1987].

#### 5.1.8.2 Situação b – direção y

Analizando, agora, as medidas das excentricidades nas seções intermediária e de topo e base na direção y percebe-se a excentricidade é igual a 3,30cm para as três seções – topo e base e intermediária, conforme figura 5.3.

Para o cálculo da área das barras longitudinais é preciso calcular:

a.- Relação entre a distância do centro das barras da armadura e a medida do lado da seção transversal na direção considerada - y

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{60} = 0,07$$

b.- Excentricidade total na direção y

$$e_y = 3,30 \text{ cm}$$

c.- Valor da força normal reduzida

$$v_d = 0,85$$

d.- Cálculo do momento fletor reduzido na direção do eixo y

$$\mu_{dy} = v_d \cdot \frac{e_y}{h_y} = 0,85 \cdot \frac{3,30}{60} = 0,05$$

e.- Cálculo da área das barras da armadura longitudinal para a situação b – todas as seções transversais ao longo da altura do pilar

Escolhem os ábacos A-17 ( $d'/h = 0,05$ ) e A-18 ( $d'/h = 0,10$ ), elaborados por Venturini (1987), pois eles apresentam o mesmo arranjo das barras da armadura longitudinal adotado para a direção x. Esses ábacos consideram o plano de ação do momento atuando na direção do eixo y. Assim, resulta para valor da taxa geométrica de armadura:

$$\omega = 0,13$$

Como este valor de taxa mecânica é menor do que a calculada na situação a para a qual resultou  $\omega = 0,36$ , entende-se que esta taxa atende as duas situações de cálculo da armadura a e b.

### 5.1.9 Arranjo final das barras na seção transversal do pilar P5

O arranjo escolhido foi o do Ábaco A-2 que resultou  $A_{s,efe}$  igual a  $37,68\text{cm}^2$  cuja taxa geométrica é igual a:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{37,68}{35 \cdot 60} = 0,01794 = 1,79\%$$

A NBR 6118:2003 indica que a área das barras da armadura longitudinal em pilares precisa resultar menor do que:

$$\rho_{max} = \frac{8,0\%}{2} = 4,0\%$$

lembrando-se que é preciso considerar apenas a metade das barras para levar em conta as regiões de emendas por traspasse.

A área de armadura mínima, que também precisa ser verificada, resulta igual a:

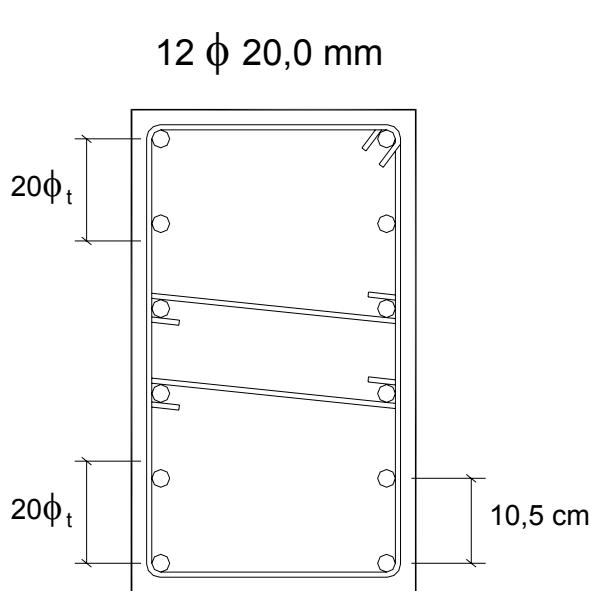
$$A_{s,min} = 0,15 \cdot \frac{N_{cd}}{f_{yd}} = 0,15 \cdot \frac{3.808}{43,48} = 13,14\text{cm}^2 \geq 0,004 \cdot A_c = 0,004 \cdot 35 \cdot 60 = 8,40\text{cm}^2$$

### 5.1.10 Arranjo na seção transversal e cálculo dos espaçamentos entre os estribos

Conforme estudados em itens anteriores deste texto e mediante consulta a NBR 6118:2003 é preciso calcular os espaçamentos entre os estribos inclusive os estribos suplementares necessários para evitar a flambagem localizada das barras longitudinais. A figura 5.4 mostra o arranjo das barras na seção transversal do pilar P5 e a rotina com os cálculos dos espaçamentos dos estribos.

### 5.1.7 Detalhamento do pilar P5

A figura 5.5 apresenta o detalhamento completo de um tramo do pilar P4, mostrando as barras longitudinais em verdadeira grandeza, inclusive com o segmento de espera, ou seja, o comprimento de traspasse para promover as emendas das barras do tramo i com as barras do tramo i + 1. A seção transversal mostrada na figura 5.4 é desenhada na figura 5.5, deslocando-se os desenhos em verdadeira grandeza dos estribos principais e suplementares. Essa figura 5.5 é enviada para a obra para que os técnicos possam montar as barras do tramo do pilar P5

Estribos

Diâmetro:  $\phi_t \geq \begin{cases} 5,0\text{mm} \\ \phi/4 = 20,0/4 = 5,0\text{mm} \end{cases}$

Adota-se  $\phi_t$  5,0mm

Espaçamento:

$$s \leq \begin{cases} 20\text{ cm} \\ b = 35\text{cm} \end{cases} \therefore s = 20\text{ cm}$$

$$12\phi = 12 \times 2,0 = 24,0\text{cm}$$

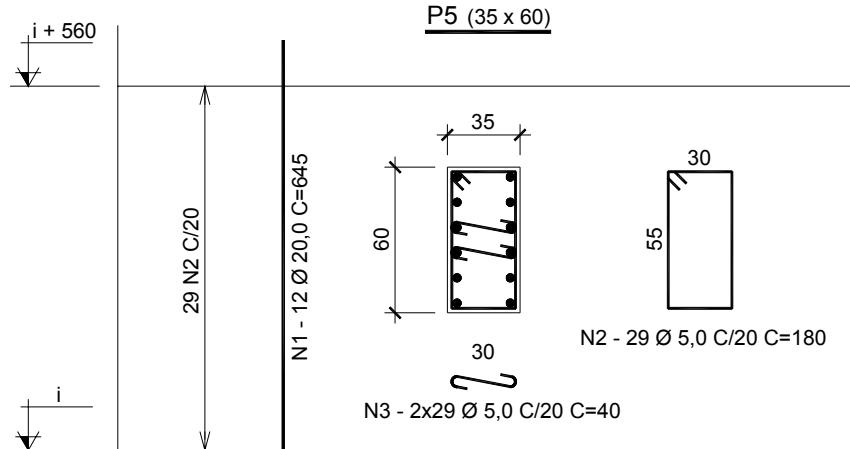
**Proteção contra a flambagem das barras:**

$$20\phi_t = 20 \cdot 0,5 = 10,0\text{cm}$$

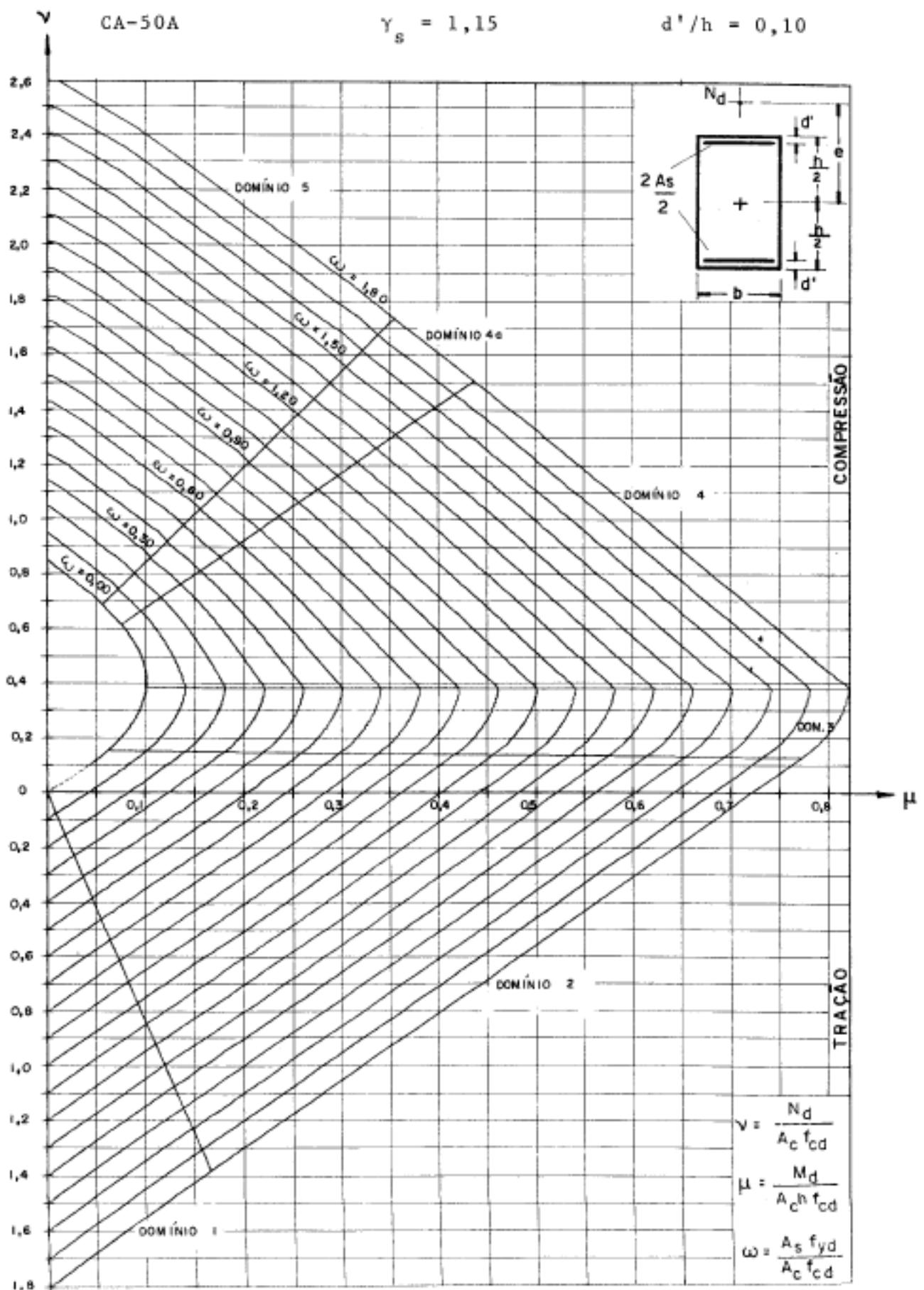
Portanto, são necessários estribos suplementares nas oito barras longitudinais centrais.

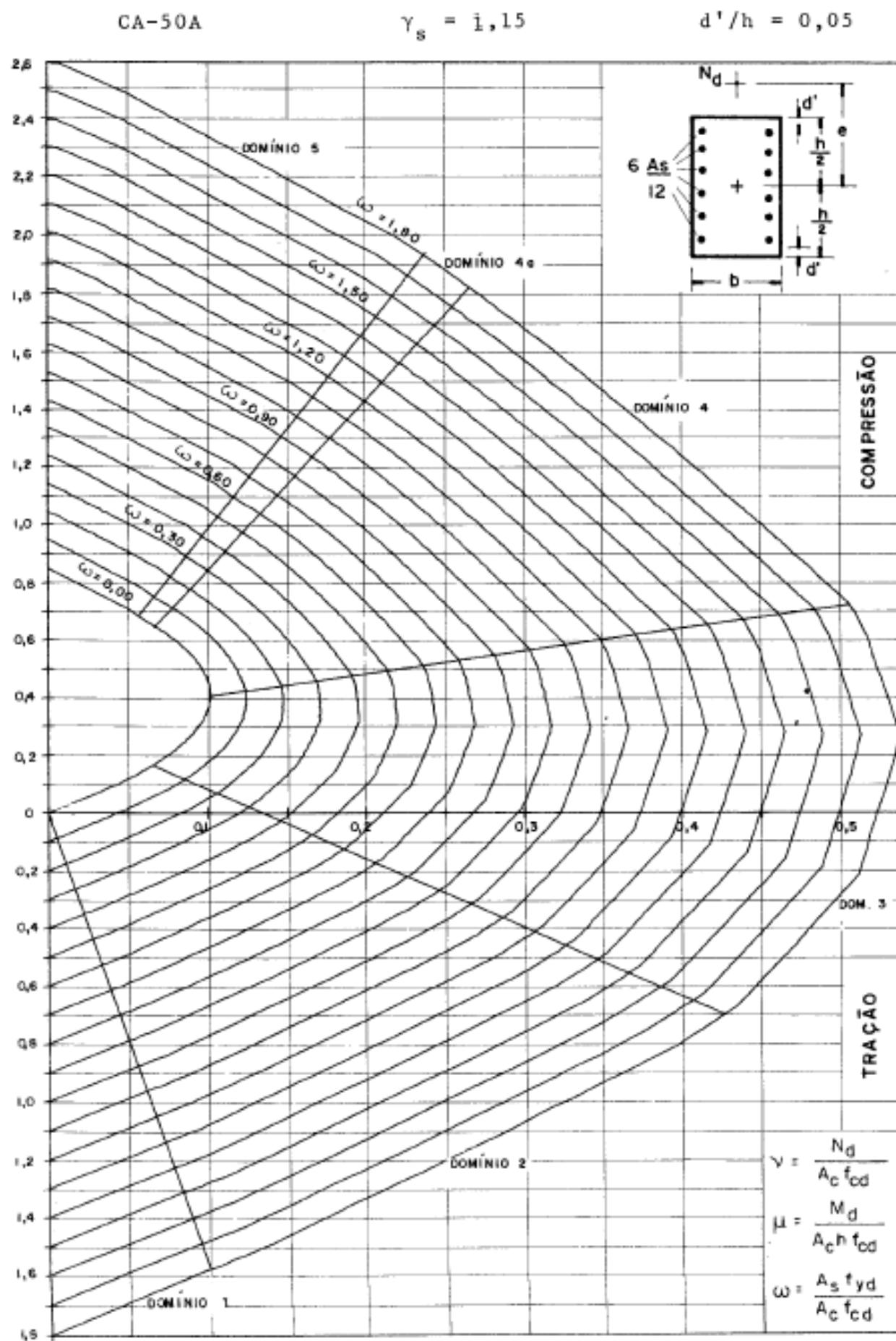
Seção transversal do pilar P5

**Figura 5.4** - Arranjo das barras da armadura longitudinal do pilar P5

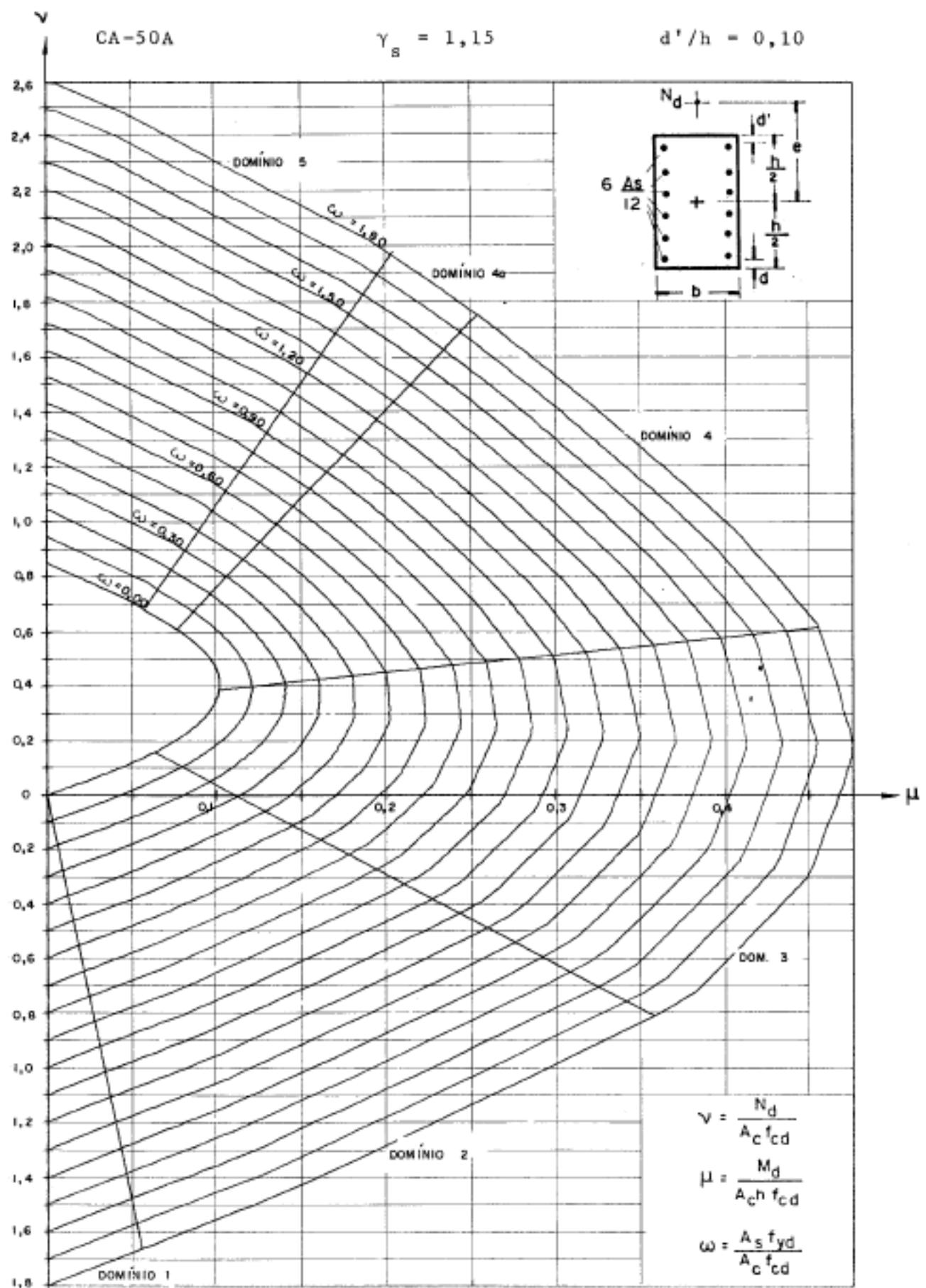


**Figura 5.5** - Detalhamento de um tramo do pilar P5



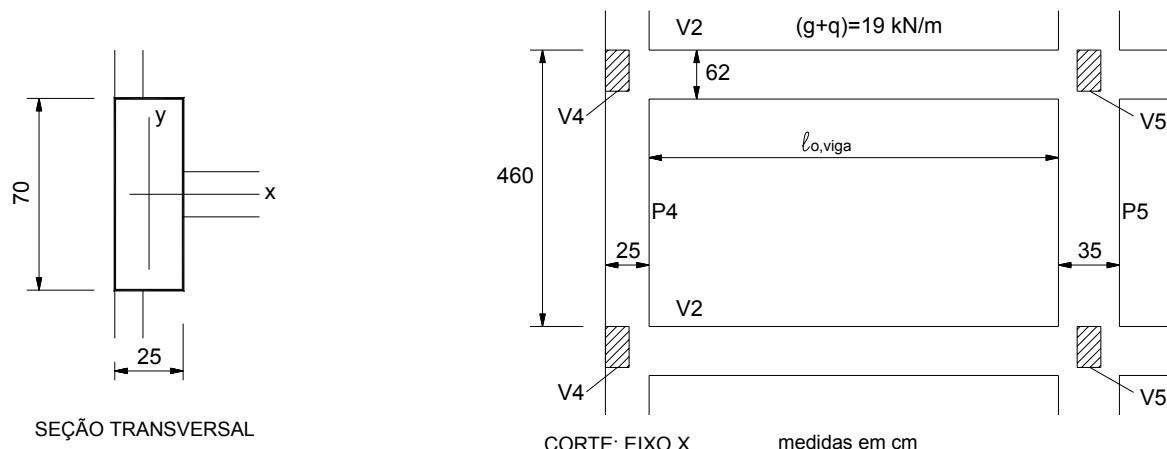


Ábaco A - 17 - Venturini (1987) - EESC - USP

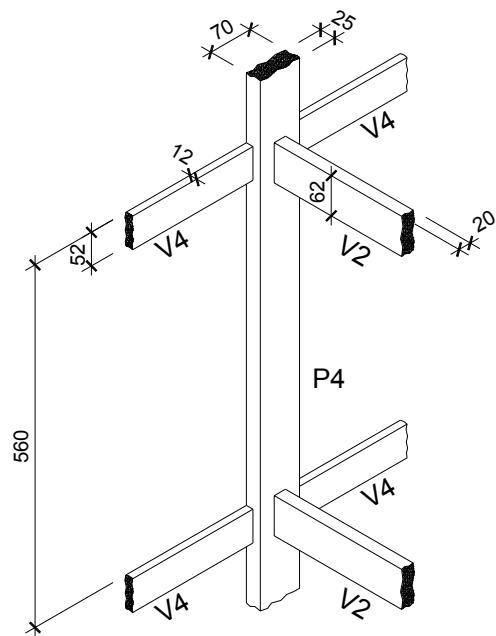


## 5.2 Exemplo 2: Pilar de extremidade – P4

Para este exemplo, considera-se o pilar de extremidade P4 da planta do pavimento tipo da figura 5.1, admitindo que a distância vertical entre os níveis dos pavimentos seja de 4,60 metros, conforme figura 5.6.



**a - Seção transversal e cortes paralelos aos eixos x e y do pilar P4**



**b - Perspectiva do pilar P4 e respectivas vigas - tipo**

**Figura 5.6 - Condições geométricas do pilar P4**

As forças normais característica e de cálculo atuantes no pilar P4 são iguais a:

$$N_k = 1.670 \text{ kN}$$

$$N_d = 1,4 \cdot 1670 = 2.338 \text{ kN}$$

Por se tratar de um pilar de extremidade com os esforços solicitantes determinados pelo processo de viga contínua, indicado na NBR 6118:2003, o pilar P4

será considerado submetido a uma força normal e um momento fletor em virtude da sua ligação com a viga V2 definindo, portanto, situação de projeto de flexão normal composta. Com relação às ações da viga V4 só se considera a força normal por causa da reação de apoio, sendo que o momento fletor não é considerado.

### 5.2.1 Determinação do momento fletor atuante no tramo do pilar P4

#### 5.2.1.1 Cálculo dos comprimentos equivalentes do tramo do pilar

a.- Direção do eixo x:

Observando a figura 5.6, nota-se que na direção do eixo x a distância livre entre as vigas V2 posicionadas em dois andares seqüentes é igual a:

$$\ell_{ox} = 460 - 62 = 398\text{cm}$$

O comprimento equivalente é calculado pelas expressões 2.7 com as indicações da figura 2.3, lembrando que  $h$  é a medida da seção transversal do pilar na direção do eixo considerado, resultando:

$$\ell_{ex} = \ell_{ox} + h_x = 398 + 25 = 423\text{cm}$$

$$\ell_{ex} = \ell_x = 460\text{cm}$$

Portanto, o comprimento equivalente do pilar na direção do eixo x é:

$$\ell_{ex} = 423\text{cm}$$

b.- Direção do eixo y:

Analogamente, na direção y tem-se:

distância livre entre as vigas V4 entre dois andares consecutivos,

$$\ell_{oy} = 460 - 52 = 408\text{cm}$$

sendo que o comprimento equivalente é a menor medida entre,

$$\ell_{ey} = \ell_{oy} + h_y = 408 + 70 = 478\text{cm}$$

$$\ell_{ey} = \ell_y = 460\text{cm}$$

ou seja, na direção do eixo y resulta:

$$\ell_{ey} = 460\text{cm}$$

#### 5.2.2.2 Cálculo do vão efeito da viga V2

A expressão a considerar é a 3.6.a, com as indicações da figura 3.2a.

$$\ell_{ef,viga} = \ell_{o,viga} + a_1 + a_2 \quad (\text{expressão 3.6a})$$

Analizando a forma estrutural do pavimento tipo, figura 5.1, determina-se a distância livre da viga V2 entre os pilares P4 e P5, resultando:

$$\ell_{o,viga} = 600 - \frac{25}{2} - \frac{35}{2} = 570\text{cm}$$

A medida  $a_1$  relativa ao pilar P4 é calculada por:

$$a_1 = \frac{h_{x,P4}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5\text{cm}$$

$$a_1 = 0,3 \cdot h_{2,V2} = 0,3 \cdot 62 = 18,6\text{cm}$$

resultando, portanto, a medida de menor valor:

$$a_1 = 12,5\text{ cm}$$

Analogamente a medida  $a_2$  relativa ao pilar P5 é calculada por:

$$a_2 = \frac{h_{x,P5}}{2} = \frac{35}{2} = 17,5\text{cm}$$

$$a_2 = 0,3 \cdot h_{2,V2} = 0,3 \cdot 62 = 18,6\text{cm}$$

resultando:

$$a_2 = 17,5\text{cm}$$

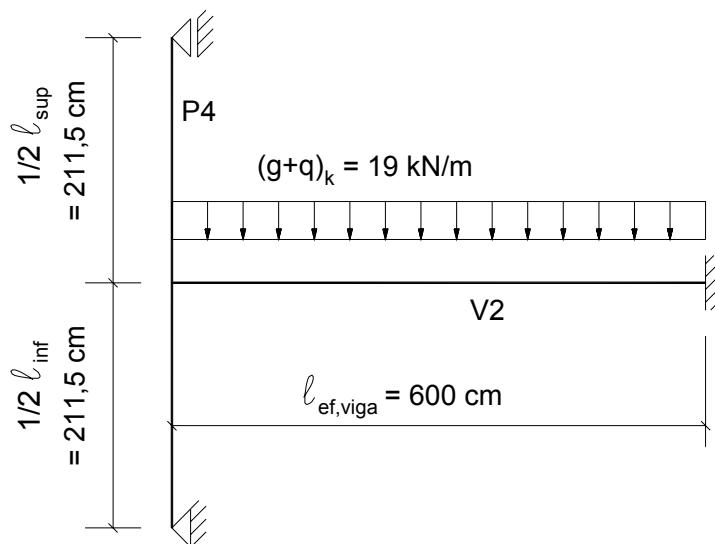
Substituindo os valores das medidas  $\ell_{ov2}$ ,  $a_1$  e  $a_2$  resulta como medida do vão efetivo do primeiro tramo da viga V2:

$$\ell_{ef,V2} = 570 + 12,5 + 17,5 = 600\text{cm}$$

### 5.2.3 Momento fletor atuante inicial no pilar P4

Os momentos fletores atuantes nos tramos do pilar P4, conforme estudado, podem ser determinados considerando o modelo simplificado da NBR 6118:2003 e neste texto indicado no item 3.2.1.

A figura 5.7 apresenta o desenho do modelo do pilar P4 com a V2 e com as medidas calculadas nesta memória de cálculo.



**Figura 5.7** - Modelo para cálculo do momento fletor solicitante no pilar P4

Segundo a rotina mostrada na NBR 6118:2003 é preciso calcular as rigidezes dos tramos superior e inferior do pilar e do primeiro tramo da viga V2 que está vinculado ao pilar.

A rigidez do tramo superior do pilar é igual a:

$$r_{\text{sup}} = \frac{3 \cdot I_{\text{pilar}}}{\frac{1}{2} \cdot l_{\text{sup}}} = \frac{3 \cdot 70 \cdot 25^3}{12} \cdot \frac{1}{211,5} = 1293 \text{ cm}^3$$

Como as seções transversais dos tramos inferior e superior são iguais tem-se:

$$r_{\text{inf}} = r_{\text{sup}} = 1.293 \text{ cm}^3$$

A rigidez da viga resulta:

$$r_{\text{viga}} = \frac{4 \cdot I_{\text{viga}}}{l_{\text{viga}}} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 62^3}{12} \cdot \frac{1}{600} = 2.648 \text{ cm}^3$$

O momento de engastamento perfeito para o primeiro tramo da viga V2 resulta igual a:

$$M_{\text{eng}} = \frac{(g + q) \cdot l_{\text{viga}}^2}{12} = \frac{19 \cdot 6,0^2}{12} = 57 \text{ kNm} = 5.700 \text{ kNm}$$

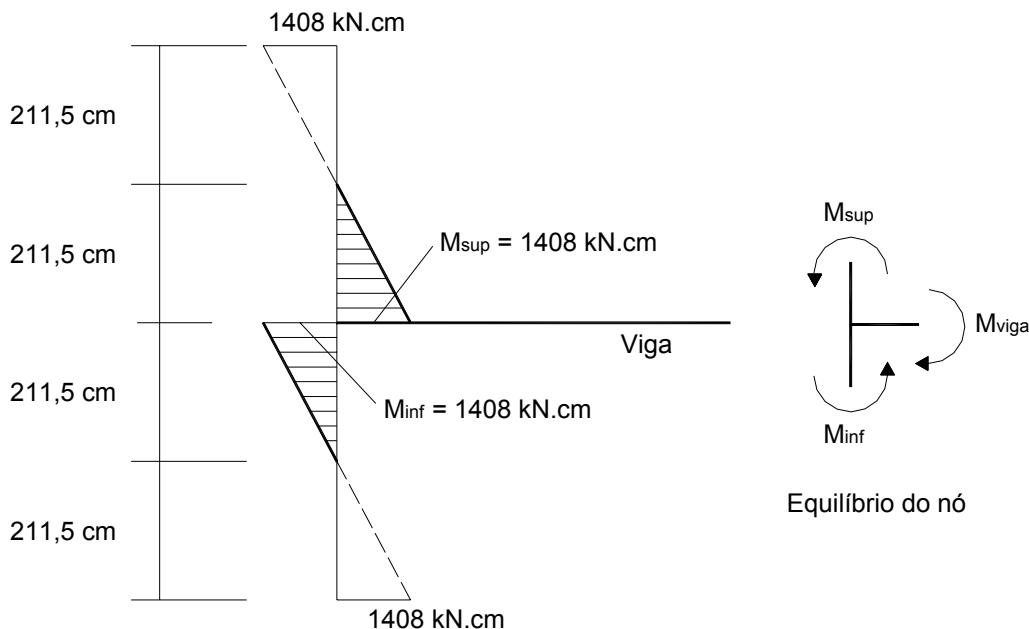
Portanto, os momentos fletores solicitantes nos tramos resultam:

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{eng}} \cdot \left( \frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{viga}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{inf}}} \right) = 5.700 \cdot \left( \frac{1.293}{2.648 + 1.293 + 1.293} \right) = 1.408 \text{ kNm}$$

Como não há mudança de seção transversal entre os pavimentos tem-se:

$$M_{\text{inf}} = M_{\text{sup}} = 1.408 \text{ kNm}$$

A figura 5.8 mostra os diagramas de momentos fletores característicos iniciais no pilar P4.



**Figura 5.8** - Diagramas de momentos fletores característicos no pilar P4

#### 5.2.3.1 Excentricidades iniciais no pilar P4 – direção x

A excentricidade inicial na seção de topo na direção do eixo x é igual a:

$$e_{iAx} = \frac{M_{di,A}}{N_d} = \frac{1.971}{2.338} = 0,84 \text{ cm}$$

pois, o momento fletor de cálculo é o momento fletor característico, indicado no diagrama da figura 5.8, multiplicado por  $\lambda_f = 1,4$ , ou seja:

$$M_{di,A} = M_{di,B} = 1,4 \cdot 1.408 = 1.971 \text{ kNm}$$

e a força normal de cálculo é:

$$N_d = 2.338 \text{ kN}$$

Na seção da base a excentricidade inicial é dada por:

$$e_{iBx} = e_{iAx} = 0,84 \text{ cm}$$

Como já estudado no item 3.2.1 e expressão 3.2 a excentricidade na seção intermediária na direção do eixo x do pilar é igual a:

$$e_{iCx} = 0,6e_{iAx} + 0,4e_{iBx} \geq 0,4e_{iAx}$$

Como a curvatura da deformada é dupla, em virtude dos momentos no topo e na base do pilar tracionarem faces opostas, o sinal de  $e_{iBx}$  é negativo na expressão acima e, portanto, tem-se:

$$e_{icx} = 0,6 \cdot 0,84 + 0,4 \cdot (-0,84) = 0,17\text{cm} \geq 0,4 \cdot e_{iAx} = 0,4 \cdot 0,84 = 0,34\text{cm}$$

Assim a excentricidade na seção intermediária na direção do eixo x resulta:

$$e_{icx} = 0,34\text{cm}$$

#### 5.2.4 Excentricidades accidentais no pilar P4

Nos pilares as excentricidades accidentais ocorrem por falta de retilinidade ou por desaprumo do pilar por falha de construção, assim a NBR 6118:2003 indica que na fase de projeto as ações geradas por estas situações precisam ser consideradas. A norma indica que só a falta de retilinidade pode ser considerada na seção intermediária e nas duas direções x e y.

O ângulo é o indicado pela expressão 3.7, portanto:

$$e_a = \theta_1 \cdot \frac{\ell}{2}$$

Na direção do eixo x tem-se:

$$\theta_{1x} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\ell_{ex}}} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{4,23}} = 0,00486\text{rad}$$

que precisa ser maior do que:

$$\theta_{1,min} = \frac{1}{300} = 0,00333\text{rad}$$

A excentricidade accidental na direção do eixo x é:

$$e_{ax} = 0,00486 \cdot \frac{423}{2} = 1,03\text{cm}$$

Analogamente na direção do eixo y tem-se:

$$\theta_{1y} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\ell_{ey}}} = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{4,60}} = 0,00466\text{rad}$$

que é maior do que:

$$\theta_{1,min} = \frac{1}{300} = 0,00333\text{rad}$$

Portanto a excentricidade accidental na direção do eixo y resulta:

$$e_{ay} = 0,00466 \cdot \frac{460}{2} = 1,07\text{cm}$$

### 5.2.5 Excentricidades mínimas (de primeira ordem) no pilar P4

A NBR 6118:2003 indica que nos pilares é preciso considerar um momento mínimo de módulo maior que o momento gerado pela excentricidade acidental, nas duas direções, cuja excentricidade mínima é calculada pela expressão 3.8, a seguir copiada.

$$e_{1,min} = \frac{M_{d1,min}}{N_d} = 0,015 + 0,03 \cdot h \quad (\text{expressão 3.8})$$

Assim, neste caso do pilar P4, na direção do eixo x, a excentricidade mínima vale:

$$(e_{1,min})_x = 0,015 + 0,03 \cdot h_x = 0,015 + 0,03 \cdot 0,25 = 0,0225\text{m} = 2,25\text{cm}$$

Na direção do eixo y tem-se:

$$(e_{1,min})_y = 0,015 + 0,03 \cdot h_y = 0,015 + 0,03 \cdot 0,70 = 0,0360\text{m} = 3,60\text{cm}$$

Comparando-se os valores das excentricidades mínimas com as acidentais calculadas no item 5.2.4 observa-se que, nas seções de topo e base e intermediárias, estas são maiores que aquelas.

Ou seja:

a.- seções de extremidade – topo e base:

$$e_{1x} = e_{iA} = 0,84\text{ cm} < (e_{1,min})_x = 2,25\text{cm} \Rightarrow e_{1x} = 2,25\text{ cm}$$

$$e_{1y} = 0\text{ cm} < (e_{1,min})_y = 3,60\text{cm} \Rightarrow e_{1y} = 3,60\text{ cm}$$

b.- seção intermediária:

$$e_{1x} = e_{iC} + e_{ax} = 0,34 + 1,03 = 1,37\text{ cm} < 2,25\text{cm} \Rightarrow e_{1x} = 2,25\text{ cm}$$

$$e_{1y} = e_{ay} = 1,07\text{ cm} < 3,60\text{cm} \Rightarrow e_{1y} = 3,60\text{ cm}$$

### 5.2.6 Excentricidades de segunda ordem no pilar P4

#### 5.2.6.1 Cálculo dos índices de esbeltez

Os índices de esbeltez do pilar P4 nas direções x e y são calculados com a expressão 2.6. Os comprimentos equivalentes são os calculados para cada direção do pilar.

a.- Direção do eixo x:

$$\lambda_x = \frac{\ell_{ex} \cdot \sqrt{12}}{h_x} = \frac{423 \cdot \sqrt{12}}{25} = 58,6$$

O valor de  $\alpha_{bx}$  é igual a 1,0, pois os momentos são menores que o momento mínimo, conforme indicado na NBR 6118:2003 e neste texto no item 2.3.

Na direção do eixo x o índice de esbeltez a considerar no projeto do pilar P4 é:

$$(\lambda_1)_x = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{ix}}{h_x}}{\alpha_{bx}} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{0,84}{25}}{1,0} = 25,4$$

A NBR 6118:2003 indica a seguinte restrição a esse valor calculado:

$$35 \leq \lambda_1 \leq 90$$

e, portanto, tem-se que:

$$(\lambda_1)_x = 35$$

Como:

$$(\lambda_1)_x = 35 < \lambda_x = 58,6 < 90$$

o pilar P04 na direção do eixo x pode ser considerado medianamente esbelto, ou seja, é necessário considerar-se a excentricidade de segunda ordem, segundo os critérios do Método do pilar padrão com curvatura aproximada.

b.- Direção do eixo y:

Analogamente ao que se fez para o eixo x tem-se neste caso de eixo y:

$$\lambda_y = \frac{\ell_{ey} \cdot \sqrt{12}}{h_y} = \frac{460 \cdot \sqrt{12}}{70} = 22,8$$

O coeficiente  $\alpha_{by}$  é igual a 1,0, pois os momentos nas extremidades do tramo são iguais a zero e, portanto menores que o momento mínimo.

O cálculo do índice de esbeltez na direção do eixo y é:

$$(\lambda_1)_y = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{iy}}{h_y}}{\alpha_{by}} = \frac{25 + 12,5 \cdot 0}{1,0} = 25 > 35$$

Portanto, considera-se  $(\lambda_1)_y = 35$  e como  $\lambda_y = 22,8$  é menor do que o limite 35, tem-se caso de pilar curto na direção do eixo y do pilar P4 não sendo necessário, portanto, considerar-se os efeitos de segunda ordem

#### 5.2.6.2 Excentricidade de segunda ordem na seção intermediária no pilar P4

Conforme já dito considera-se o Método do pilar padrão com curvatura aproximada, cujo valor da excentricidade de segunda ordem ( $e_2$ ) é calculada por:

$$e_{2x} = \frac{\ell_{ex}^2}{10} \cdot \frac{1}{r}$$

O valor da força normal reduzida é igual a:

$$v = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} = \frac{2.338}{(25 \cdot 70) \cdot 2,14} = 0,62$$

e, portanto, o valor do inverso da curvatura é:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h_x \cdot (v + 0,5)} = \frac{0,005}{25 \cdot (0,62 + 0,5)} = 1,79 \cdot 10^{-4} < \frac{0,005}{h_x} = \frac{0,005}{25} = 2,0 \cdot 10^{-4}$$

A excentricidade de segunda ordem na direção do eixo x é igual a:

$$e_{2x} = \frac{423^2}{10} \cdot 1,79 \cdot 10^{-4} = 3,20\text{cm}$$

### 5.2.7 Determinação da área da armadura longitudinal do pilar P4

Para se determinar a área das barras da armadura longitudinal é preciso verificar quais são as situações de cálculo mais desfavoráveis em relação às situações de projeto (excentricidades iniciais) e levando em conta as excentricidades accidentais e as mínimas nas duas direções (a maior entre as duas) e a de segunda ordem (na direção do eixo x).

Esse trabalho fica facilitado com a montagem da figura 5.9. Analisando-a percebe-se que se têm os seguintes casos:

#### **Seção intermediária:**

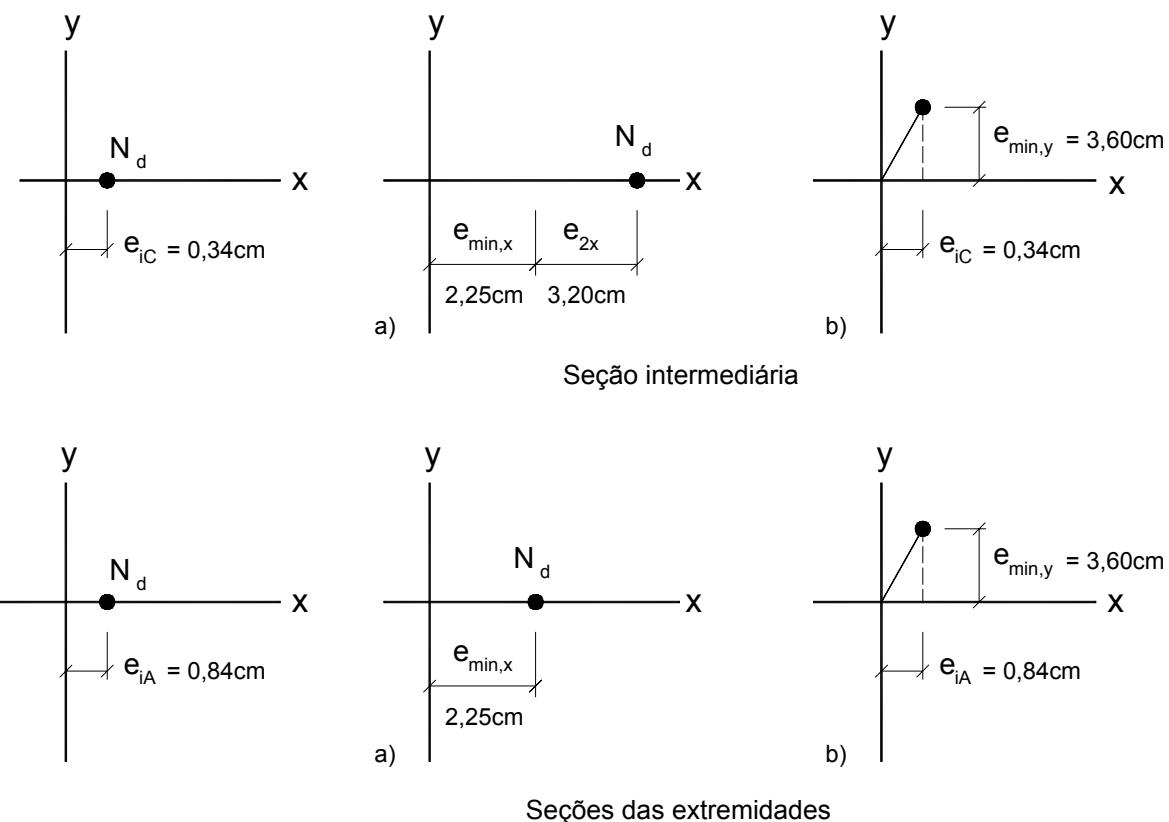
Caso a – flexão normal composta com excentricidade  $e_x$  igual a 5,11cm;

Caso b – flexão composta oblíqua com  $e_x$  igual a 0,34cm e  $e_y$  igual a 3,60cm.

#### **Seções de topo e base:**

Caso a – flexão normal composta com excentricidade  $e_x$  igual a 2,25cm;

Caso b – flexão composta oblíqua com  $e_x$  igual a 0,84cm e  $e_y$  igual a 3,60cm.



**Figura 5.9 - Situações das excentricidades de projeto e para o cálculo da armadura no pilar P4**

A seção intermediária é a mais crítica e a que é considerada para o cálculo da área da armadura longitudinal.

#### 5.2.7.1 Determinação da área da armadura para a situação de cálculo a:

a.- Relação entre a distância do centro das barras da armadura posicionadas nas quinas e a medida do lado da seção na direção x

$$\frac{d'}{h} = \frac{4,0}{25} = 0,16 \cong 0,15$$

b.- excentricidade total na direção do eixo x e situação a seção intermediária

$$e = 2,25 + 3,20 = 5,45\text{cm}$$

c.- força normal reduzida

$$v_d = 0,62$$

d.- momento fletor reduzido

$$\mu_d = v_d \cdot \frac{e}{h} = 0,62 \cdot \frac{5,45}{25} = 0,14$$

e.- Ábacos de Venturini (1987) para a flexão normal composta:

Adota-se o Ábaco A-3 com as barras da armadura distribuídas paralelamente ao maior lado do pilar, resultando:

$$\omega = 0,25$$

f.- Área das barras da armadura

$$A_s = \frac{\omega \cdot A_c \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,25 \cdot (25 \cdot 70) \cdot 2,14}{43,5} = 21,52 \text{cm}^2$$

g.- Área efetiva de barras da armadura

$$A_{sefe} = 24,12 \text{cm}^2$$

Essa área é representada por 12φ 16,0mm.

#### 5.2.7.2 Determinação da área da armadura para a situação de cálculo b:

Como já observado para esta situação tem-se caso de flexão composta oblíqua.

a.- Relações entre as distâncias dos centros das barras da armadura posicionadas nas quinas e as medidas dos lados da seção nas direções x e y

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{70} = 0,06 \cong 0,05$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{25} = 0,16 \cong 0,15$$

b.- Excentricidades

$$e_x = 0,34 \text{cm}$$

$$e_y = 3,60 \text{cm}$$

c.- força normal reduzida

$$v_d = 0,62$$

d.- Momentos reduzidos

$$\mu_{dy} = v_d \cdot \frac{e_y}{h_y} = 0,62 \cdot \frac{3,60}{70} = 0,03$$

$$\mu_{dx} = v_d \cdot \frac{e_x}{h_x} = 0,62 \cdot \frac{0,34}{25} = 0,01$$

Consultando os ábacos A-16 e A-17 de Pinheiro et al. (1994) para a flexão oblíqua resulta:

$$\omega = \text{zero}$$

Que é uma taxa mecânica menor que a calculada para a situação de cálculo da armadura (flexão normal composta) da seção intermediária.

#### 5.2.7.3 Taxa geométrica de armadura

A área efetiva de armadura longitudinal do pilar P4 é:

$$A_s = 24,12 \text{cm}^2 \quad (12\phi 16,0 \text{mm})$$

A taxa geométrica da armadura é calculada por:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{24,12}{25 \cdot 70} = 0,0138 \equiv 1,38\% < \frac{8,0\%}{2} = 4,0\%$$

Que é menor do que o limite indicado na NBR 6118:2003 considerando a região de emenda por traspasse (4%).

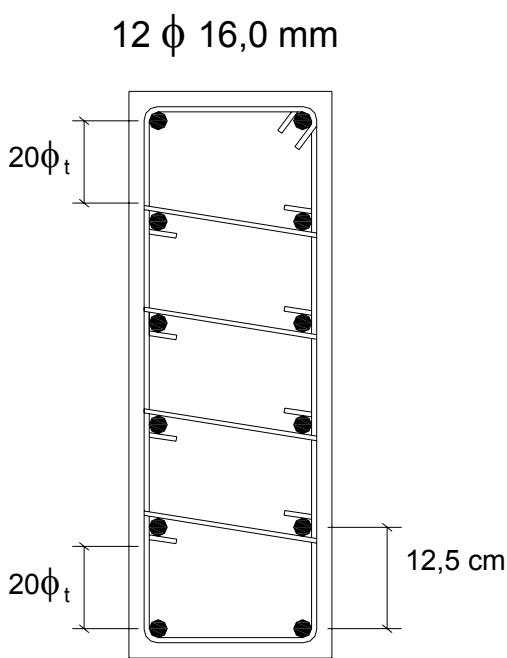
A área da armadura mínima é calculada por:

$$A_{s,min} = 0,15 \cdot \frac{N_{cd}}{f_{yd}} = 0,15 \cdot \frac{2.338}{43,48} = 8,07 \text{cm}^2 \geq 0,004 \cdot A_c = 0,004 \cdot 25 \cdot 70 = 7,00 \text{cm}^2$$

Portanto, a área de armadura efetiva do pilar P4 é maior que a área mínima.

#### 5.2.7.4 Arranjo das barras na seção transversal do pilar P4

A disposição das barras da armadura longitudinal do pilar P4 tem que seguir a disposição adotada por ocasião do dimensionamento, e é preciso calcular os espaçamentos entre os estribos inclusive os estribos suplementares necessários para evitar a flambagem localizada das barras longitudinais. A figura 5.10 mostra o arranjo das barras na seção transversal do pilar P4 e os cálculos dos espaçamentos dos estribos.



### Estribos

*Diâmetro:*  $\phi_t \geq \begin{cases} 5,0\text{mm} \\ \phi/4 = 16/4 = 4,0\text{mm} \end{cases}$

Adota-se  $\phi_t = 5,0$

*Espaçamento:*

$$s \leq \begin{cases} 20\text{cm} \\ b = 25\text{cm} \end{cases} \quad \therefore s \leq 19\text{cm}$$

$$12\phi = 12 \cdot 1,6 = 19,2\text{cm}$$

### **Proteção contra a flambagem das barras:**

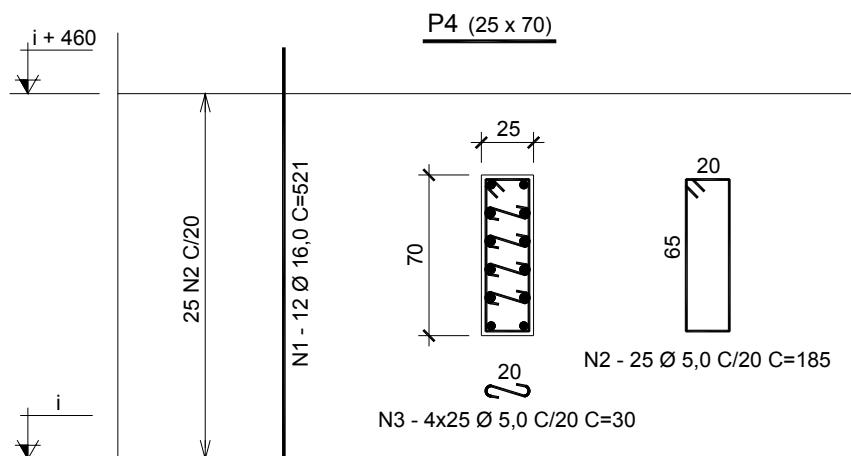
$$20 \cdot \phi_t = 20 \cdot 0,5 = 10\text{cm}$$

Portanto, são necessários estribos suplementares nas oito barras longitudinais centrais.

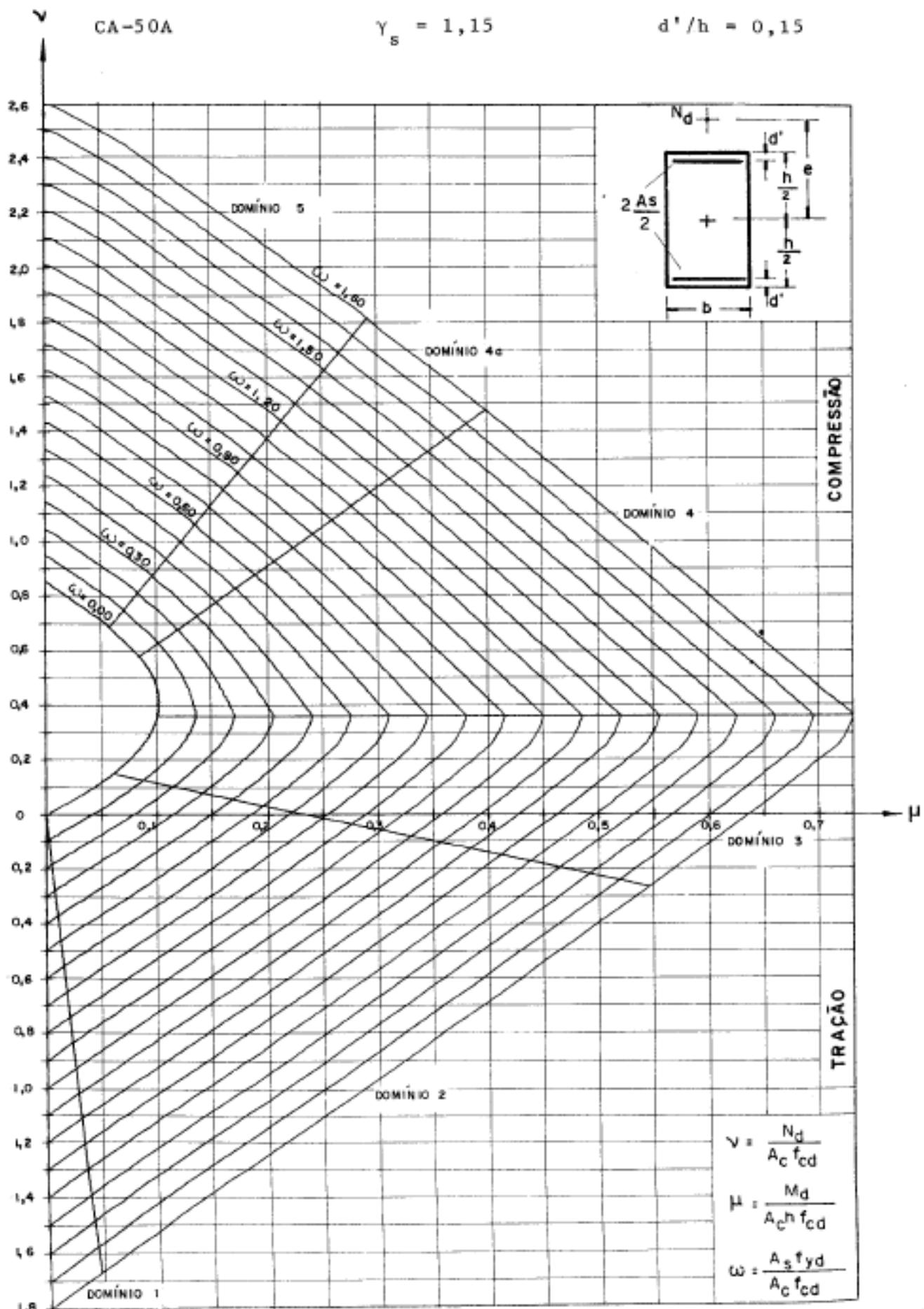
Seção transversal do pilar P4

**Figura 5.10** - Arranjo das barras das armaduras longitudinal e transversal do pilar P4

A figura 5.11 apresenta o detalhamento completo de um tramo do pilar P4 que é enviado à obra.



**Figura 5.11** - Detalhamento do pilar P4



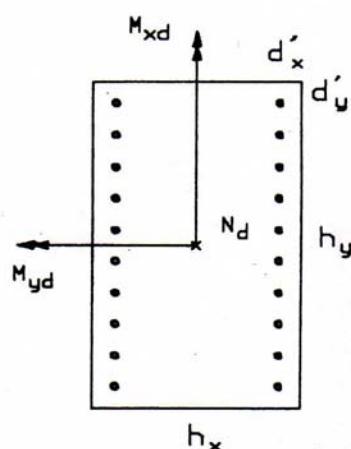
Ábaco A - 3 - Venturini (1987) - EESC - USP

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$



CA-50 A

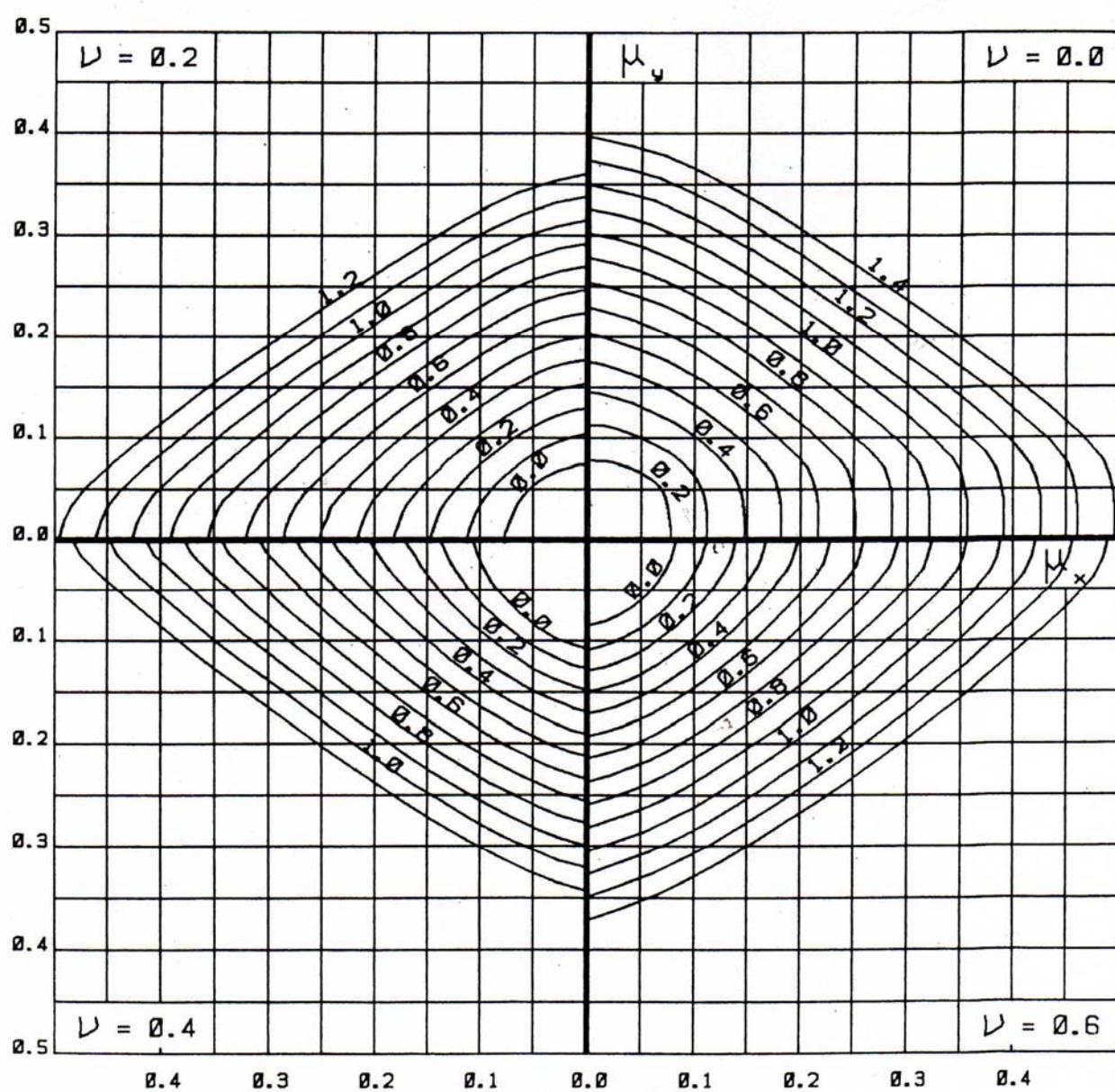
$$d'_y = 0.050 h_y$$

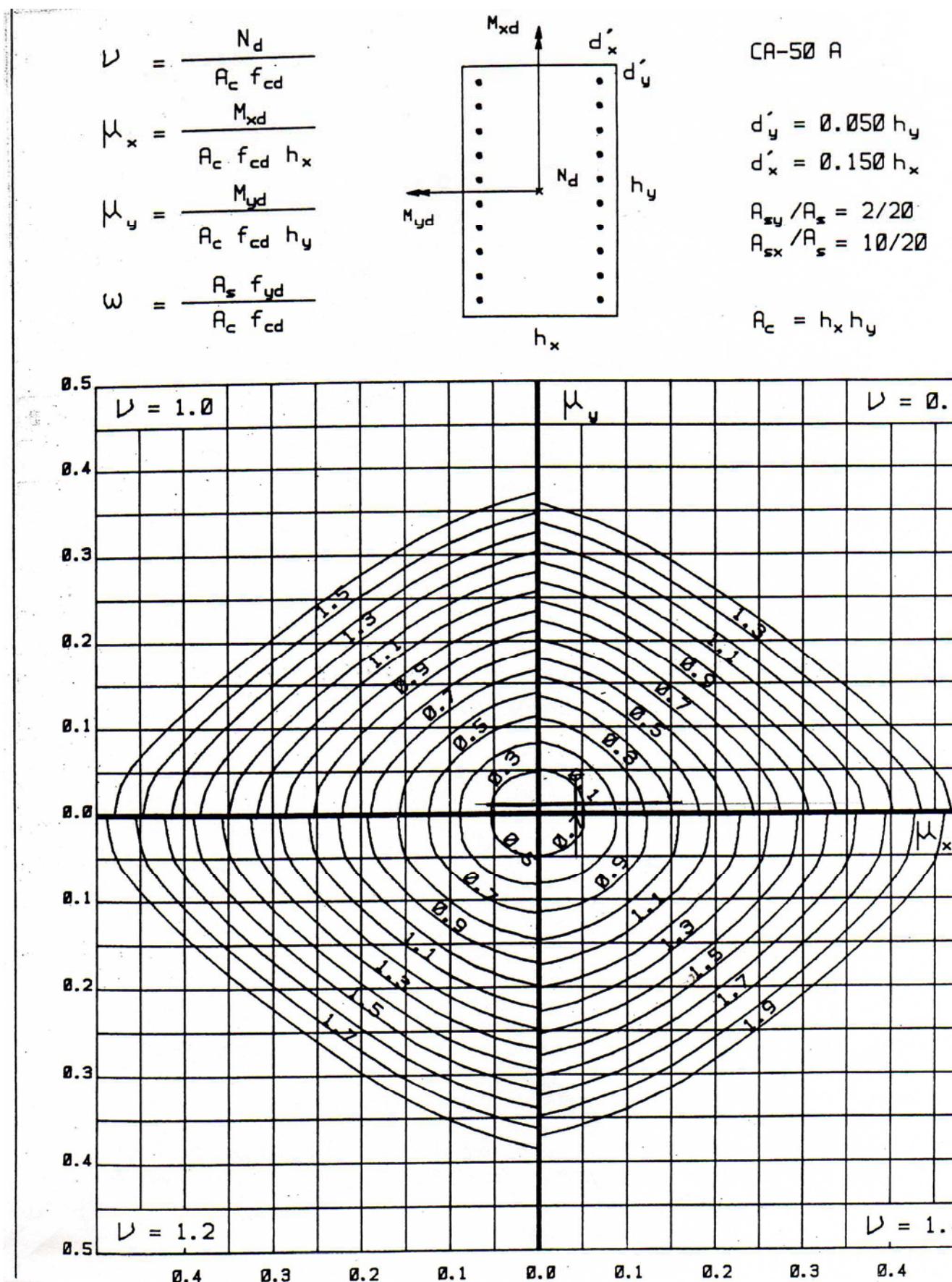
$$d'_x = 0.150 h_x$$

$$A_{sy}/A_s = 2/20$$

$$A_{sx}/A_s = 10/20$$

$$A_c = h_x h_y$$





### 5.3 Exemplo 3: Pilar de canto – P1

O pilar de canto P1 indicado no desenho da forma do pavimento tipo da figura 5.1, com a distância de piso a piso igual a 4,60 metros, é projetado neste item. A figura 5.12 mostra as medidas da seção transversal do pilar P1 e as dimensões das vigas V1 e V4 inclusive as distâncias entre pisos.

Os módulos das forças normal característica e de cálculo atuante no pilar P1 são:

$$N_k = 1.230 \text{ kN}$$

$$N_a = 1,4 \cdot 1.230 = 1.722 \text{ kN}$$

#### 5.3.1 Comprimentos equivalentes do tramo do pilar nas direções x e y

Os comprimentos equivalentes do pilar nas direções x e y são calculados considerando as expressões 2.7, indicadas na NBR 6118:2003, e observando o desenho da figura 2.3.

##### 5.3.1.1 Eixo x:

Analizando a figura 5.12 determina-se a distância entre as faces das vigas V1, da face superior do andar i até a face inferior do andar i + 1, resultando:

$$\ell_{ox} = 460 - 62 = 398 \text{ cm}$$

O comprimento equivalente é o menor valor entre o comprimento livre do pilar acrescido da dimensão do pilar na direção considerada, neste caso x, e a distância entre os centros das vigas do andar i e i + 1, indicado a seguir:

$$\ell_{ex} = \ell_{ox} + h_x = 398 + 25 = 423 \text{ cm}$$

$$\ell_{ex} = 460 \text{ cm}$$

Portanto, tem-se para valor de  $\ell_{ex}$ :

$$\ell_{ex} = 423 \text{ cm}$$

##### 5.3.1.2 Eixo y:

Analogamente, observando a figura 5.12, vem:

A distância livre entre as vigas na direção y do pilar é igual a:

$$\ell_{oy} = 460 - 52 = 408 \text{ cm}$$

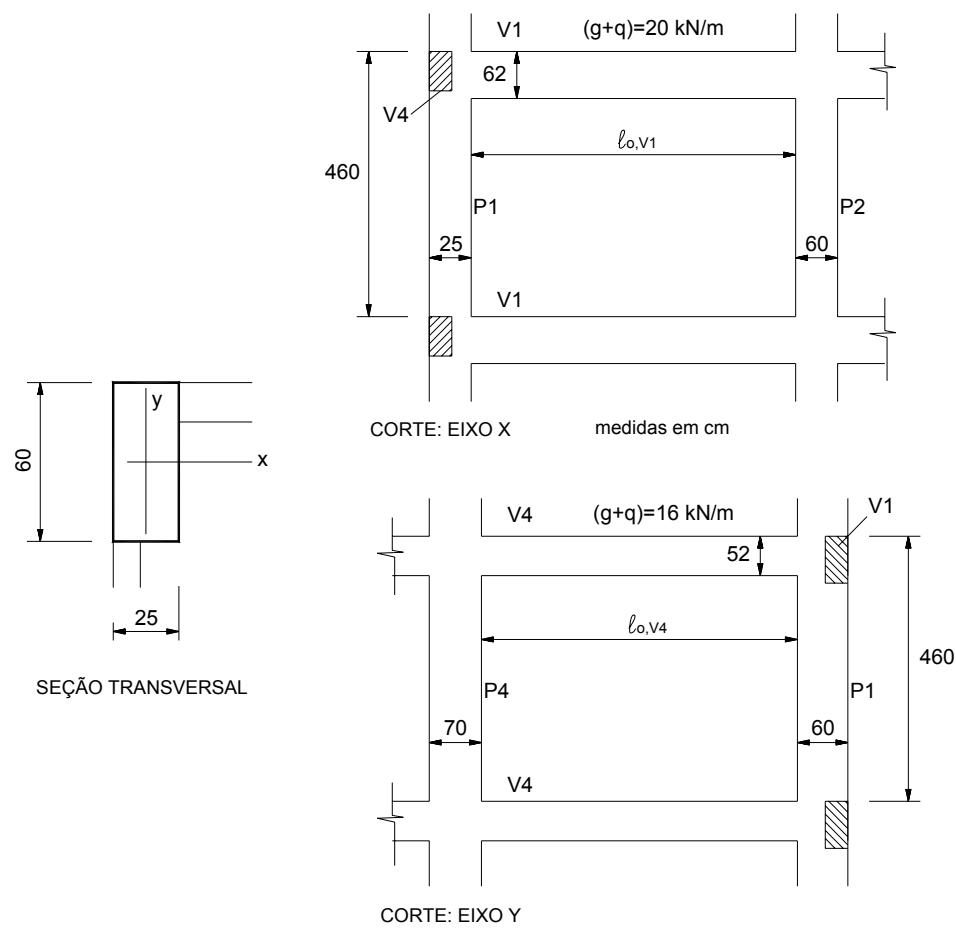
O comprimento equivalente é o menor valor entre as seguintes medidas:

$$\ell_{ey} = \ell_{oy} + h_y = 408 + 60 = 468 \text{ cm}$$

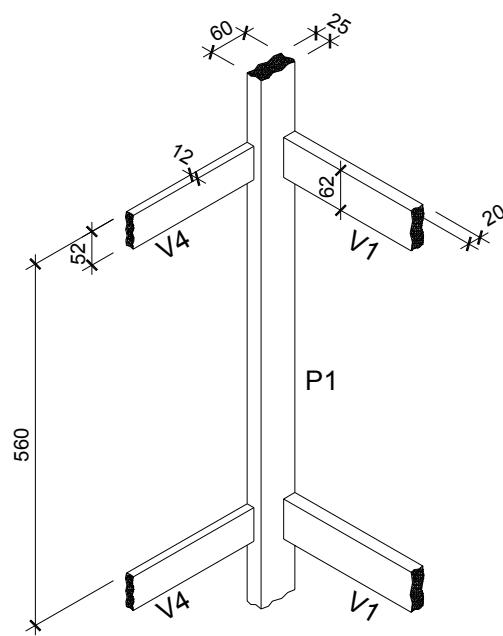
$$\ell_{ey} = 460 \text{ cm}$$

Portanto,  $\ell_{ey}$  resulta:

$$\ell_{ey} = 460 \text{ cm}$$



a - Seção transversal e cortes paralelos aos eixos x e y do pilar P1



b - Perspectiva do pilar P1 e respectivas vigas - tipo

**Figura 5.12** - Pilar P1 e vigas V1 e V4 com as dimensões necessárias para o projeto

### 5.3.1.3 Vãos efetivos das vigas V1 e V4

Para cálculo dos vãos efetivos dos tramos extremos das vigas V1 e V4 usam-se as expressões 3.6.a com as indicações da figura 3.2.a

a.- Viga V1:

Conforme já visto os vão efetivos dos tramos de vigas são calculados por:

$$\ell_{\text{ef},V1} = \ell_{o,V1} + a_1 + a_2$$

A distância livre da viga V1, isto é, a distância entre as faces internas dos pilares de apoio é igual a:

$$\ell_{o,V1} = 600 - \frac{25}{2} - \frac{60}{2} = 557,5 \text{ cm}$$

Sendo  $a_1$  igual a menor medida entre:

$$a_1 = \frac{h_{x,P1}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}$$

$$a_1 = 0,3 \cdot h_{V1} = 0,3 \cdot 62 = 18,6 \text{ cm}$$

Com  $a_2$  igual a menor medida entre:

$$a_2 = \frac{h_{x,P2}}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$$

$$a_2 = 0,3 \cdot h_{V1} = 0,3 \cdot 62 = 18,6 \text{ cm}$$

resultando,  $a_2 = 18,6 \text{ cm}$

Portanto o vão efetivo do primeiro tramo da viga V1 é:

$$\ell_{\text{ef},V1} = 557,5 + 12,5 + 18,6 = 588,6 \text{ cm}$$

b.- Viga V4:

Analogamente para a viga V4 tem-se:

$$\ell_{\text{ef},V4} = \ell_{o,V4} + a_1 + a_2$$

sendo o vão livre, conforme o desenho da forma do pavimento tipo, dado por:

$$\ell_{o,V4} = 400 + \frac{20}{2} - 60 - \frac{70}{2} = 315 \text{ cm}$$

A medida  $a_1$  é igual ao menor valor entre:

$$a_1 = \frac{h_{y,P1}}{2} = \frac{60}{2} = 30,0\text{cm}$$

$$a_1 = 0,3 \cdot h_{V4} = 0,3 \cdot 52 = 15,6\text{cm}$$

resultando  $a_1 = 15,6\text{cm}$

A medida  $a_2$  é igual ao menor valor entre:

$$a_2 = \frac{h_{y,P4}}{2} = \frac{70}{2} = 35,0\text{cm}$$

$$a_2 = 0,3 \cdot h_{V4} = 0,3 \cdot 52 = 15,6\text{cm}$$

e, portanto,  $a_2 = 15,6\text{cm}$

o vão efetivo da viga V4 é igual a:

$$\ell_{ef,V4} = 315 + 15,6 + 15,6 = 346,2\text{cm}$$

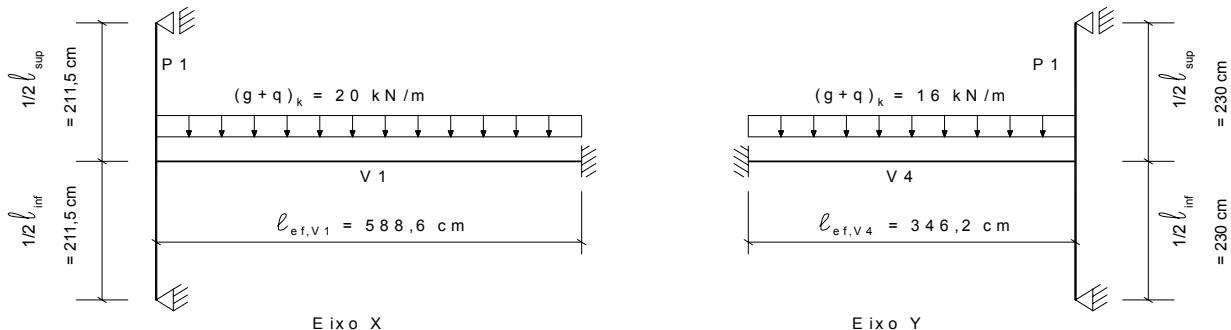
### 5.3.2 Cálculo dos momentos fletores atuantes nos pilares

Se os esforços solicitantes são determinados considerando pórtico plano ou espacial, com auxílio de programa computacional, os cálculos deste item não precisam ser feitos, basta analisar os resultados com relação aos momentos fletores e forças normais, para cada tramo, e com estes valores dimensionar o tramo em questão.

Alguns programas fornecem inclusive os desenhos dos diagramas de esforços solicitantes e existem programas que resolvem e apresentam os resultados considerando toda a estrutura do edifício constituída por barras horizontais e verticais tratando-a como pórtico espacial.

Neste exemplo os momentos fletores atuantes no pilar P1 nas direções dos eixos x e y são calculados pelo processo simplificado da NBR 6118:2003, cujos modelos, para ambas as vigas estão mostrados na figura 5.13.

As expressões para cálculo dos momentos fletores, por processo simplificado, são 3.3 e 3.4 com as fórmulas para cálculo da rigidez indicadas em 3.5.



**Figura 5.13** - Modelos para a determinação dos momentos fletores atuantes no pilar P1 relativos às vigas V1 e V4

### 5.3.2.1 Momentos fletores relativos a viga V1 - Eixo x:

O momento fletor atuante nos tramos do pilar na direção x é calculado como a rotina seguinte.

Calculam-se os índices de rigidez dos tramos superior e inferior do pilar e do tramo da viga vinculada ao pilar, calcula-se o momento de engastamento perfeito e, por fim, os momentos atuantes nas barras superior e inferior do pilar.

As rigidezes dos tramos superior e inferior do pilar resultam:

$$r_{\text{sup}} = r_{\text{inf}} = \frac{\frac{3 \cdot I_{\text{pilar}}}{1 \cdot \ell_{\text{sup}}}}{2} = \frac{3 \cdot 60 \cdot 25^3}{12 \cdot 211,5} = 1108 \text{ cm}^3$$

A rigidez da viga é dada por:

$$r_{\text{viga}} = \frac{\frac{4 \cdot I_{\text{viga}}}{\ell_{\text{viga}}}}{12} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 62^3}{12 \cdot 588,6} = 2.699 \text{ cm}^3$$

O momento de engastamento perfeito do primeiro tramo da viga é igual a:

$$M_{\text{eng}} = \frac{(g + q) \cdot \ell_{\text{viga}}^2}{12} = \frac{20 \cdot 5,886^2}{12} = 57,74 \text{ kNm} = 5.774 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores atuantes nos tramos superior e inferior em relação a viga V1 resultam iguais a:

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{inf}} = M_{\text{eng}} \cdot \left( \frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{viga}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{inf}}} \right) = 5.774 \cdot \left( \frac{1.108}{2.699 + 1.108 + 1.108} \right) = 1.302 \text{ kNm}$$

### 5.3.2.2 Momentos fletores relativos a viga V4 - Eixo y:

Segue-se o mesmo procedimento com relação ao pilar P1 e viga V4.

As rigidezes dos tramos do pilar P1 resultam:

$$r_{\text{sup}} = r_{\text{inf}} = \frac{\frac{3 \cdot I_{\text{pilar}}}{1 \cdot \ell_{\text{sup}}}}{2} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 60^3}{12 \cdot 230} = 5.870 \text{ cm}^3$$

A rigidez da viga V4 é igual a:

$$r_{\text{viga}} = \frac{\frac{4 \cdot I_{\text{viga}}}{\ell_{\text{viga}}}}{12} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 52^3}{12 \cdot 346,2} = 1.625 \text{ cm}^3$$

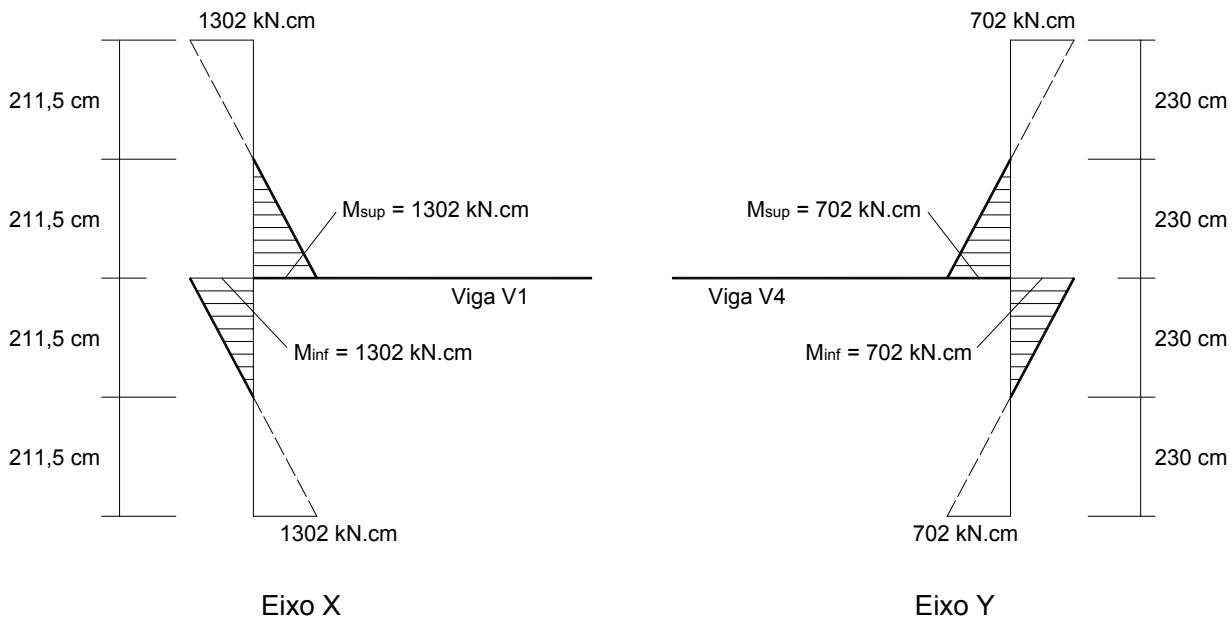
O momento de engastamento perfeito do primeiro tramo da viga V4 junto ao pilar P1 é:

$$M_{\text{eng}} = \frac{(g + q) \cdot \ell_{\text{viga}}^2}{12} = \frac{16 \cdot 3,462^2}{12} = 15,98 \text{ kNm} = 1.598 \text{ kN.cm}$$

Os momentos fletores nos tramos do pilar resultam:

$$M_{\text{sup}} = M_{\text{inf}} = M_{\text{eng}} \cdot \left( \frac{r_{\text{sup}}}{r_{\text{viga}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{inf}}} \right) = 1.598 \cdot \left( \frac{5.870}{1.625 + 5.870 + 5.870} \right) = 702 \text{kNm}$$

A figura 5.14 mostra os diagramas de momentos fletores característicos nos tramos do pilar P1.



**Figura 5.14** - Diagramas de momentos fletores no pilar P1 relativos as vigas V1 e V4

### 5.3.3 Cálculo das excentricidades relativas aos momentos atuantes nas seções de topo e base do pilar P1

As excentricidades nas direções x e y relativas aos momentos no pilar (de primeira ordem), nas seções de topo e base, resultam:

$$M_{dix,A} = M_{dix,B} = 1,4 \cdot 1302 = 1.823 \text{kNm}$$

$$e_{ix,A} = e_{ix,B} = \frac{1823}{1722} = 1,06 \text{ cm}$$

$$M_{diy,A} = M_{diy,B} = 1,4 \cdot 702 = 983 \text{kNm}$$

$$e_{iy,A} = e_{iy,B} = \frac{983}{1722} = 0,57 \text{ cm}$$

### 5.3.4 Cálculos dos momentos mínimos

A NBR 6118:2003 indica que é preciso dimensionar o pilar considerando, em ambas as direções momento fletor mínimo calculado pela expressão 3.8.

Os módulos dos momentos mínimos nas direções x e y resultam iguais a:

$$M_{d1x,min} = N_d \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h_x) = 1722 \cdot (0,015 + 0,03 \cdot 0,25) = 38,75 \text{kNm} = 3.875 \text{kNm}$$

$$M_{d1y,min} = N_d \cdot (0,015 + 0,03 \cdot h_y) = 1722 \cdot (0,015 + 0,03 \cdot 0,60) = 56,83 \text{kNm} = 5.683 \text{kNm}$$

Os módulos dos momentos mínimos são maiores que os momentos fletores atuantes nas seções de topo e base oriundos da ligação com as vigas V1 e V4.

### 5.3.5 Verificação da necessidade da consideração dos momentos de segunda ordem

A verificação da necessidade da consideração dos momentos de segunda ordem é feita calculando-se os índices de esbeltez, para as duas direções x e y, e com as expressões indicadas no item 2.3.

#### 5.3.5.1 Cálculo dos índices de esbeltez

a.- Direção do eixo x:

O índice de esbeltez é calculado com a expressão 2.8, considerando-se a medida do lado do pilar na direção x, resultando:

$$\lambda_x = \frac{\ell_{ex} \cdot \sqrt{12}}{h_x} = \frac{423 \cdot \sqrt{12}}{25} = 58,6$$

O cálculo do índice de esbeltez de referência é feito com a expressão 2.1:

$$(\lambda_1)_x = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{ix}}{h_x}}{\alpha_{bx}} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{1,06}{25}}{1,0} = 25,5 > 35$$

com  $\alpha_{bx} = 1,0$ , pois os momentos são menores que o momento mínimo (expressão 2.5).

Portanto tem-se que  $(\lambda_1)_x = 35$

E como, visto no item 2.3 e na NBR 6118:2003,

$$(\lambda_1)_x = 35 < \lambda_x = 58,6 < 90$$

tem-se pilar medianamente esbelto na direção x, havendo necessidade de considerar os efeitos de segunda ordem nesta direção.

b.- Direção do eixo y:

Analogamente:

o índice de esbeltez na direção do eixo y resulta:

$$\lambda_y = \frac{\ell_{ey} \cdot \sqrt{12}}{h_y} = \frac{460 \cdot \sqrt{12}}{60} = 26,6 < 35$$

O índice de esbeltez de referência é:

$$(\lambda_1)_y = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{e_{iy}}{h_y}}{\alpha_{by}} = \frac{25 + 12,5 \cdot \frac{0,57}{60}}{1,0} = 25,1 > 35$$

sendo  $\alpha_{by} = 1,0$ , pois os momentos são menores que o momento mínimo.

Portanto,  $(\lambda_1)_y = 35$

e, como

$$\lambda_y = 26,6 < (\lambda_1)_y = 35$$

não há a necessidade de se considerar o efeito de segunda ordem na direção y.

### 5.3.6 Cálculo dos momentos totais nas duas direções x e y

#### 5.3.6.1 Cálculo dos momentos totais nas duas direções x e y usando as equações do momento total ( $M_{d,tot}$ ) e da rigidez aproximada ( $\kappa$ )

Na flexão composta oblíqua, aplica-se o método do pilar padrão com *rigidez aproximada*, processo indicado pela NBR 6118:2003 4 neste texto estudado no item 3.2.4 alínea b, cujo procedimento consiste na amplificação dos momentos de 1.<sup>a</sup> ordem, em cada direção simultaneamente. Dessa amplificação resulta o momento total máximo, para determinação da área da armadura longitudinal, expresso por:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \cdot M_{d1,A}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \cdot \frac{\kappa}{v}}} \geq \begin{cases} M_{d1,A} \\ M_{1d,min} \end{cases} \quad \text{com} \quad \kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{M_{d,tot}}{h \cdot N_d} \right) \cdot v$$

Neste projeto do pilar foram feitas iterações para a determinação dos momentos totais que consideram os momentos de primeira ordem (com valor mínimo) e o de segunda ordem. Neste exemplo, são realizadas 3 iterações, empregando o método da bisseção para obter os valores iniciais de cada iteração.

As expressões usadas a seguir são as indicadas neste texto e, portanto, a rotina de cálculo seguida, pode ser observada no item 3.2.4 alínea a, ou na NBR 6118:2003.

##### 5.3.6.1.1 Momento total na direção do eixo x:

Com os dados indicados a seguir inicia-se o processo iterativo com a finalidade de se calcular o momento total na direção do eixo x do pilar P1.

$$\alpha_{bx} = 1,0 \quad v_d = 1.722 / (25 \cdot 60 \cdot 2,14) = 0,54$$

$$M_{d1x,A} = 1.823 \text{kNm} \quad M_{d1x,min} = 3.875 \text{kNm}$$

$$\lambda_x = 58,6$$

1<sup>a</sup> Iteração:  $M_{dx,tot} = 1.823 \text{kNm}$

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{1.823}{25 \cdot 1.722} \right) \cdot 0,54 = 20,94$$

$$M_{dx,tot} = \frac{1,0 \cdot 1.823}{1 - \frac{58,6^2}{120 \cdot \frac{20,94}{0,54}}} = 6.955 \text{kNm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Iteração: } M_{dx,tot} = \frac{6.957 + 1.823}{2} = 4.390 \text{kNm}$$

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{4.390}{25 \cdot 1722} \right) \cdot 0,54 = 26,1$$

$$M_{dx,tot} = \frac{1,0 \cdot 1.823}{1 - \frac{58,6^2}{120 \cdot \frac{26,1}{0,54}}} = 4.469 \text{kNm}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Iteração: } M_{dx,tot} = \frac{4.390 + 4.469}{2} = 4.430 \text{kNm}$$

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{4.430}{25 \cdot 1.722} \right) \cdot 0,54 = 26,17$$

$$M_{dx,tot} = \frac{1,0 \cdot 1.823}{1 - \frac{58,6^2}{120 \cdot \frac{26,17}{0,54}}} = 4.451 \text{kNm}$$

Portanto, após 3 iterações tem-se:

$$M_{dx,tot} = 4.451 \text{kNm} > M_{d1x,min} = 3.875 \text{kNm}$$

E, portanto, o momento solicitante de cálculo  $M_{dx,tot} = 4.451 \text{kN.cm}$  será o considerado com plano de ação paralelo ao eixo x para cálculo da armadura do pilar.

A excentricidade total na direção do eixo x, considerando as excentricidades de primeira e segunda ordem, é dada por:

$$e_{x,total} = \frac{M_{dx,tot}}{N_d} = \frac{4.451}{1.722} = 2,58 \text{cm}$$

### 5.3.6.1.2 Momento total na direção do eixo y

Com os dados a seguir inicia-se o processo iterativo com a finalidade de se calcular o momento total na direção do eixo y do pilar P1.

$$\alpha_{by} = 1,0 \quad v_d = 1.722 / (25 \cdot 60 \cdot 2,14) = 0,54$$

$$M_{d1y,A} = 983 \text{kNm} \quad M_{d1y,min} = 5.683 \text{kNm}$$

$$\lambda_y = 26,6$$

$$1^{\text{a}} \text{ Iteração: } M_{dy,tot} = 983 \text{kNm}$$

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{983}{60 \cdot 1722} \right) \cdot 0,54 = 18,10$$

$$M_{dy,tot} = \frac{1,0 \cdot 983}{1 - \frac{26,6^2}{120 \cdot \frac{18,10}{0,54}}} = 1.193 \text{kNm}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Iteração: } M_{dy,tot} = \frac{1.193 + 983}{2} = 1.088 \text{kNm}$$

$$\kappa = 32 \cdot \left( 1 + 5 \cdot \frac{1.088}{60 \cdot 1722} \right) \cdot 0,54 = 18,19$$

$$M_{dy,tot} = \frac{1,0 \cdot 983}{1 - \frac{26,6^2}{120 \cdot \frac{18,19}{0,54}}} = 1.192 \text{kNm}$$

Em virtude da convergência alcançada, uma 3º iteração não é necessária, pois o momento para a terceira iteração é menor que o momento mínimo de primeira ordem de cálculo.

Portanto, após 2 iterações tem-se:

$$M_{dy,tot} = 1.192 \text{kNm} < M_{d1y,min} = 5.683 \text{kNm}$$

Como a NBR 6118:2003 indica que a seção transversal precisa resistir um momento igual ao momento mínimo o momento na direção y é igual a:

$$M_{dy,tot} = 5.683 \text{kNm}$$

Cálculo da excentricidade total na direção do eixo y:

$$e_{y,total} = \frac{M_{dy,tot}}{N_d} = \frac{5.683}{1.722} = 3,30 \text{cm}$$

### 5.3.6.2 Cálculo dos momentos totais nas duas direções x e y usando a equação da solução única

A título de comparação calculam-se, nesta sessão, os momentos totais com a equação deduzida para solução única do processo do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada. O leitor pode observar que os resultados são praticamente iguais, com o que era esperado, nas direções x e y, em virtude de aproximações numéricas.

#### 5.3.6.2.1 Momento total na direção do eixo x

Com a equação 3.16 se calcula o valor do momento total na direção do eixo x.

$$a \cdot M_{dx,tot}^2 + b \cdot M_{dx,tot} + c = \text{zero} \quad (\text{equação 3.16})$$

Com os seguintes dados relativos à direção x:

$$\begin{aligned}\alpha_{bx} &= 1,0 & N_d &= 1.722 \text{kN} \\ M_{d1x,A} &= 1.823 \text{kNm} = 18,23 \text{kNm} & M_{d1x,min} &= 3.875 \text{kNm} = 38,75 \text{kNm} \\ \ell_{ex} &= 423 \text{cm} = 4,23 \text{m} & h_x &= 25 \text{cm} = 0,25 \text{m}\end{aligned}$$

vem:

$$a = 5 \cdot h = 5 \cdot 0,25 = 1,25;$$

$$b = h^2 \cdot N_d - \frac{\ell_{ex}^2 \cdot N_d}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} = 0,25^2 \cdot 1.722 - \frac{4,23^2 \cdot 1.722}{320} - 5 \cdot 0,25 \cdot 1,0 \cdot 18,23 = ;$$

$$c = -h^2 \cdot N_d \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} = -0,25^2 \cdot 1.722 \cdot 1,0 \cdot 18,23 = ;$$

Substituindo a, b e c na equação 3.16 tem-se:

$$1,25 \cdot M_{dx,tot}^2 - 11,45 \cdot M_{dx,tot} - 1.962,00 = \text{zero}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, resulta:

$$M_{dx,tot} = 44,46 \text{kNm} = 4.446 \text{kNm}$$

sendo que o momento total na direção do eixo x tem que ser maior do que o momento mínimo, assim tem-se:

$$M_{dx,tot} = 4.446 \text{kNm} > > M_{d1x,min} = 3.875 \text{kNm}$$

### 5.3.6.2.2 Momento total na direção do eixo y

Com a equação 3.16 se calcula o valor do momento total na direção do eixo y.

$$a \cdot M_{dy,tot}^2 + b \cdot M_{dy,tot} + c = \text{zero} \quad (\text{equação 3.16})$$

Com os seguintes dados relativos à direção y:

$$\begin{aligned}\alpha_{by} &= 1,0 & N_d &= 1.722 \text{kN} \\ M_{d1y,A} &= 983 \text{kNm} = 9,83 \text{kNm} & M_{d1y,min} &= 5.683 \text{kNm} = 56,83 \text{kNm} \\ \ell_{ey} &= 460 \text{cm} = 4,60 \text{m} & h_y &= 60 \text{cm} = 0,60 \text{m}\end{aligned}$$

vem:

$$a = 5 \cdot h = 5 \cdot 0,60 = 3,00;$$

$$b = h^2 \cdot N_d - \frac{\ell_{ex}^2 \cdot N_d}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} = 0,60^2 \cdot 1.722 - \frac{4,60^2 \cdot 1.722}{320} - 5 \cdot 0,60 \cdot 1,0 \cdot 9,83 = 476,56;$$

$$c = -h^2 \cdot N_d \cdot \alpha_b \cdot M_{1d,A} = -0,60^2 \cdot 1.722 \cdot 1,0 \cdot 9,83 = -6.093,81;$$

Substituindo a, b e c na equação 3.16 tem-se:

$$3,00 \cdot M_{dy,tot}^2 + 476,56 \cdot M_{dy,tot} - 6.093,81 = \text{zero}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, resulta:

$$M_{dx,tot} = 11,84 \text{ kNm} = 1.184 \text{ kNcm}$$

sendo que o momento total na direção do eixo x tem que ser maior do que o momento mínimo, assim tem-se:

$$M_{dy,tot} = 1.184 \text{ kNcm} < M_{d1y,min} = 5.683 \text{ kNcm}$$

### 5.3.7 Cálculo da área da armadura longitudinal

Para o cálculo da área das barras da armadura longitudinal se segue a rotina conhecida por ocasião do estudo de determinação da área de barras da armadura longitudinal de seções transversais de elementos lineares em concreto armado submetidos a flexão composta. Usam-se neste exemplo os ábacos elaborados por Pinheiro et al. (1994). Para facilitar o entendimento cópias dos ábacos utilizados são apresentadas anexas.

Para cálculo das áreas das armaduras relativas aos momentos totais nas direções x e y consideraram-se os momentos calculados pelo processo iterativo.

É necessário calcular as distâncias entre os centros das barras junto às quinas da seção transversal do pilar em relação às medidas dos lados da seção, resultando:

$$\frac{d'_y}{h_y} = \frac{4,0}{60} = 0,07$$

$$\frac{d'_x}{h_x} = \frac{4,0}{25} = 0,16 \cong 0,15$$

As excentricidades no pilar P1 são iguais a:

$$e_y = 3,30 \text{ cm}$$

$$e_x = 2,58 \text{ cm}$$

O valor da força normal reduzida é igual a:

$$v_d = 0,54$$

Os momentos fletores reduzidos são iguais a:

$$\mu_{dy} = v_d \frac{e_y}{h_y} = 0,54 \cdot \frac{3,30}{60} = 0,03$$

$$\mu_{dx} = v_d \frac{e_x}{h_x} = 0,54 \cdot \frac{2,58}{25} = 0,06$$

Escolhendo-se o Ábaco A-17 elaborado por Pinheiro et al. (1994) para a flexão oblíqua com  $\nu_d = 0,4$  e  $\nu_d = 0,6$  resulta taxa mecânica das barras da armadura igual a zero, ou seja:

$$\omega = \text{zero}$$

indicando que a seção transversal precisa ser armada com a taxa mínima de armadura longitudinal.

### 5.3.8 Cálculo da taxa geométrica mínima de armadura

A área mínima de armadura é calculada pela expressão indicada pela NBR 6118:2003, resultando:

$$A_{s,\min} = 0,15 \cdot \frac{N_{cd}}{f_{yd}} = 0,15 \cdot \frac{1.722}{43,5} = 5,94\text{cm}^2 \geq 0,004 \cdot A_c = 0,004 \cdot 25 \cdot 60 = 6,00\text{cm}^2$$

A maior medida do lado do pilar é igual a 60cm, portanto a NBR 6118:2203 indica que a maior distância entre barras longitudinais é igual a 40cm, então a seção transversal será armada com  $6\phi 16,0\text{mm}$ , totalizando uma área de barras longitudinais efetiva de  $12,06\text{cm}^2$ .

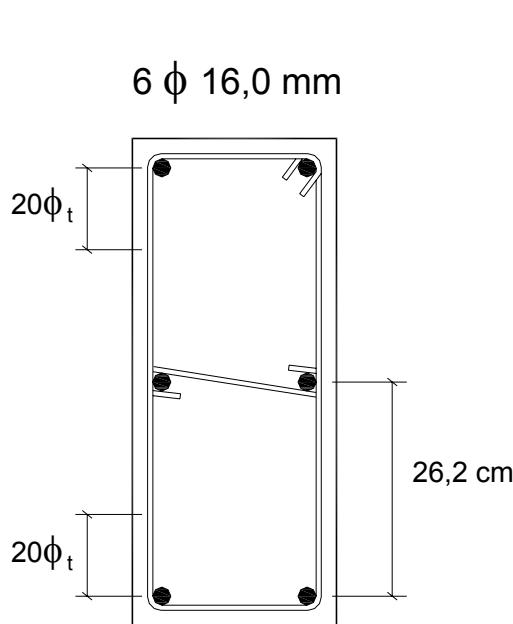
A taxa geométrica das barras longitudinais é igual a:

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{12,06}{25 \cdot 60} = 0,0080 \equiv 0,80\% < \frac{8,0\%}{2} = 4,0\%$$

que é menor do que o valor máximo da taxa geométrica de 4,0% levando-se em conta a região de emendas por traspasse.

### 5.3.9 Arranjo das barras das armaduras longitudinal e transversal

A figura 5.15 mostra o arranjo das barras na seção transversal do pilar P1 e o dimensionamento das barras da armadura transversal (estribos) e os respectivos espaçamentos.



### Estribos

Diâmetro:  $\phi_t \geq \begin{cases} 5,0 \text{ mm} \\ \phi/4 = 16/4 = 4,0 \text{ mm} \end{cases}$

Adota-se  $\phi_t = 5,0 \text{ mm}$

### Espaçamento:

$$s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b = 25 \text{ cm} \\ 12\phi = 12 \cdot 1,6 = 19,2 \text{ cm} \end{cases} \therefore s \leq 19 \text{ cm}$$

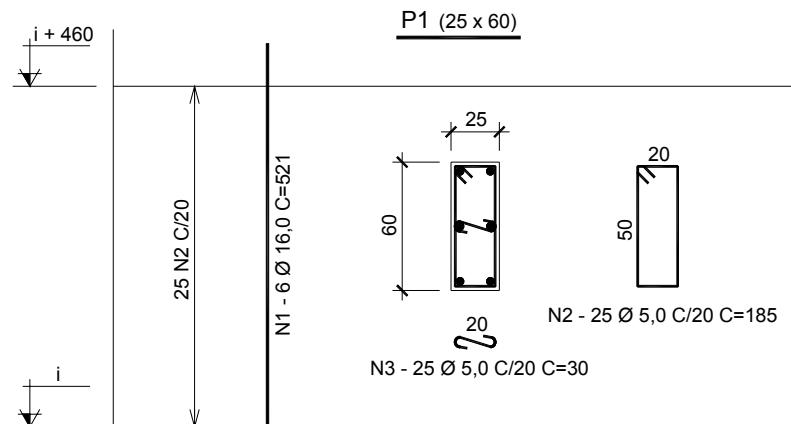
### Proteção contra a flambagem das barras:

$$20 \cdot \phi_t = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ cm}$$

Portanto, é necessário estribo suplementar nas barras longitudinais centrais.

Seção transversal do pilar P1

**Figura 5.15** - Arranjo das barras das armaduras longitudinal e transversal do pilar P1



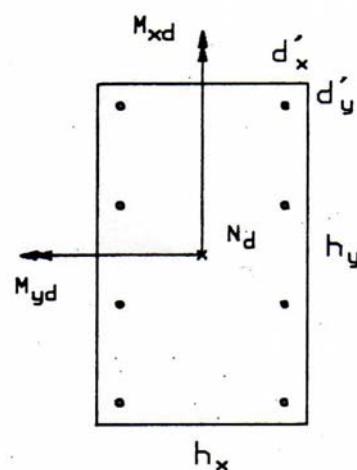
**Figura 5.16** - Detalhamento do pilar P1

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}}$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c f_{cd} h_x}$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c f_{cd} h_y}$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}}$$



CA-50 A

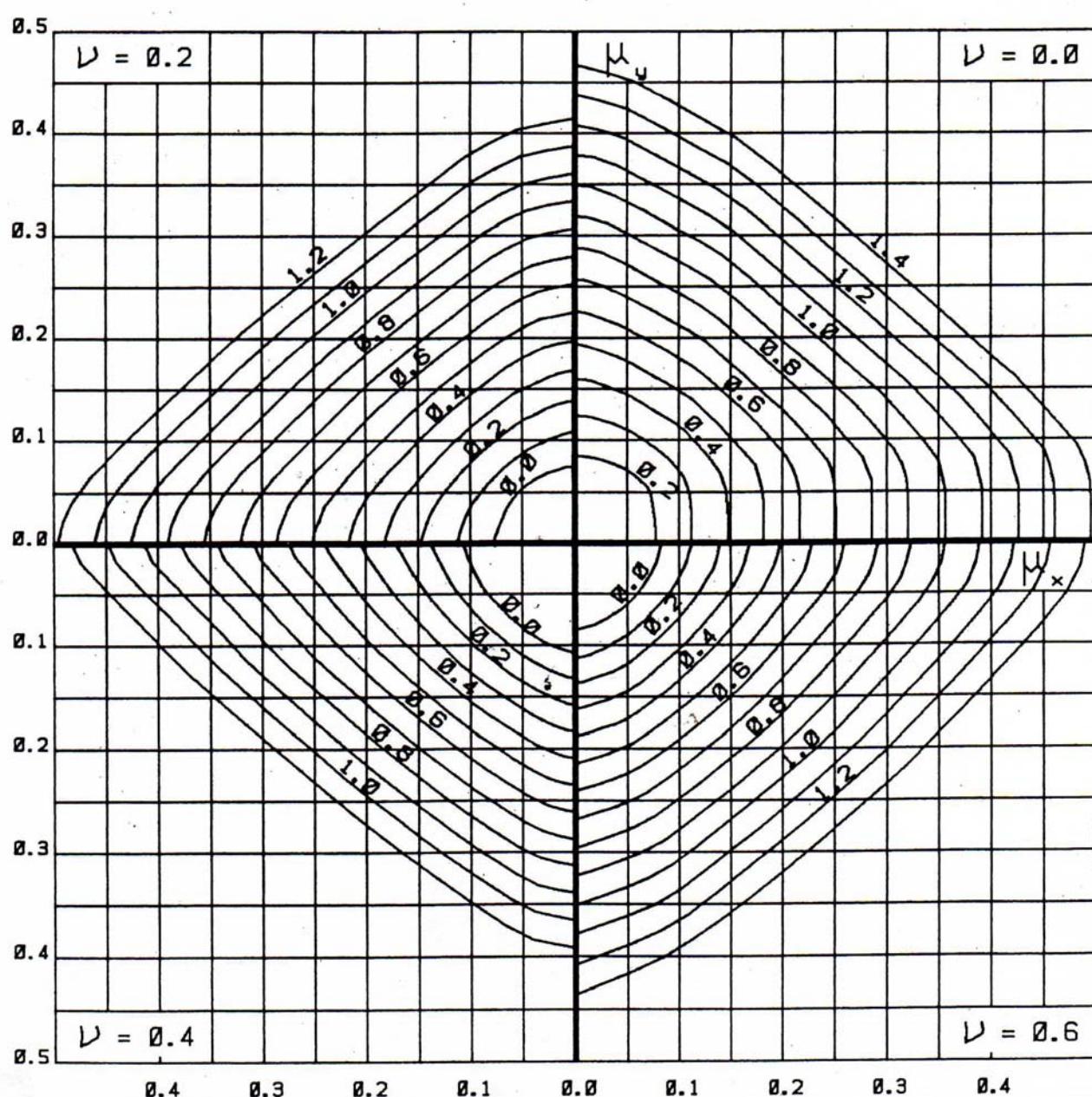
$$d'_y = 0.050 h_y$$

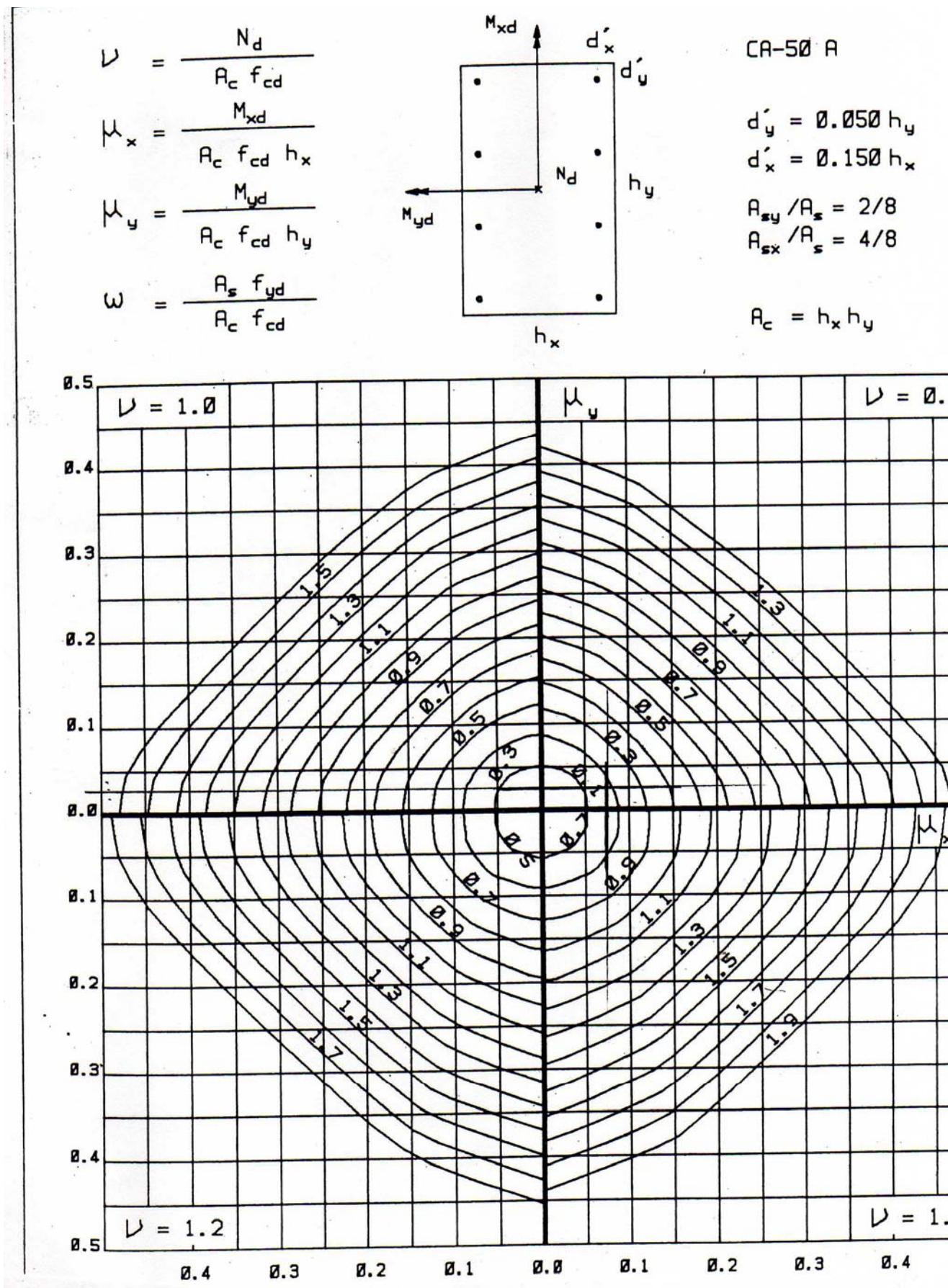
$$d'_x = 0.150 h_x$$

$$A_{sy}/A_s = 2/8$$

$$A_{sx}/A_s = 4/8$$

$$A_c = h_x h_y$$





## Bibliografia

- AGUIAR, E.A.B. (2000). *Projeto de pilares de concreto de alto desempenho*. São Carlos, Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). NBR 6118:1978. *Projeto e execução de estruturas de concreto armado*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS: NBR 6118:2003. *Projeto de estruturas de concreto*. Rio de Janeiro, ABNT.
- CARVALHO, R.C.; FIGUEIREDO FILHO, J.R. (2002). Pilares de concreto armado. p.9-25. Notas de aula – Universidade Federal de São Carlos.
- FUSCO, P. B. (1981) *Estruturas de concreto: solicitações normais*. Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- GIONGO, J.S.; FIORIN, E. (1999). Arranjos de armadura para vigas e pilares de edifícios em concreto armado. In: FILHO, E.S.S. *Nova normalização brasileira para o concreto estrutural*. Rio de Janeiro, Interciênciac. Cap.10, p.209-43.
- PINHEIRO, L.M.; BARALDI; L.T.; POREM, M.E. (1994). *Concreto armado: Ábacos para flexão oblíqua*. São Carlos, EESC-USP.
- VENTURINI, W.S. (1987). *Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta*. São Carlos, EESC-USP.