

**ECV 113 – ESTRUTURAS DE CONCRETO, METÁLICAS E DE
MADEIRA**

DIMENSIONAMENTO DE BARRA COMPRIMIDAS

Prof. Ana Paula Moura
ana.paula.moura@live.com

PROGRAMAÇÃO DA AULA

- 1) Considerações iniciais: onde ocorrem, tipos usuais.
- 2) Instabilidade por flexão, torção ou flexo torção;
- 3) Fenômenos de instabilidade;
- 4) Resistência de cálculo de barras prismáticas comprimidas.

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

“Elementos estruturais prismáticos solicitados por uma força axial de compressão → Barras comprimidas”

1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

- Onde ocorrem?
- Formas usuais?



1. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

NBR 8800:2008 - Item 5.3 - Barras prismáticas submetidas à força axial de compressão – pg 42

Esta subseção aplica-se a barras prismáticas submetidas à força axial de compressão. No dimensionamento dessas barras, deve ser atendida a condição:

$$N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd}$$

onde:

$N_{c,Sd}$ é a força axial de compressão solicitante de cálculo;

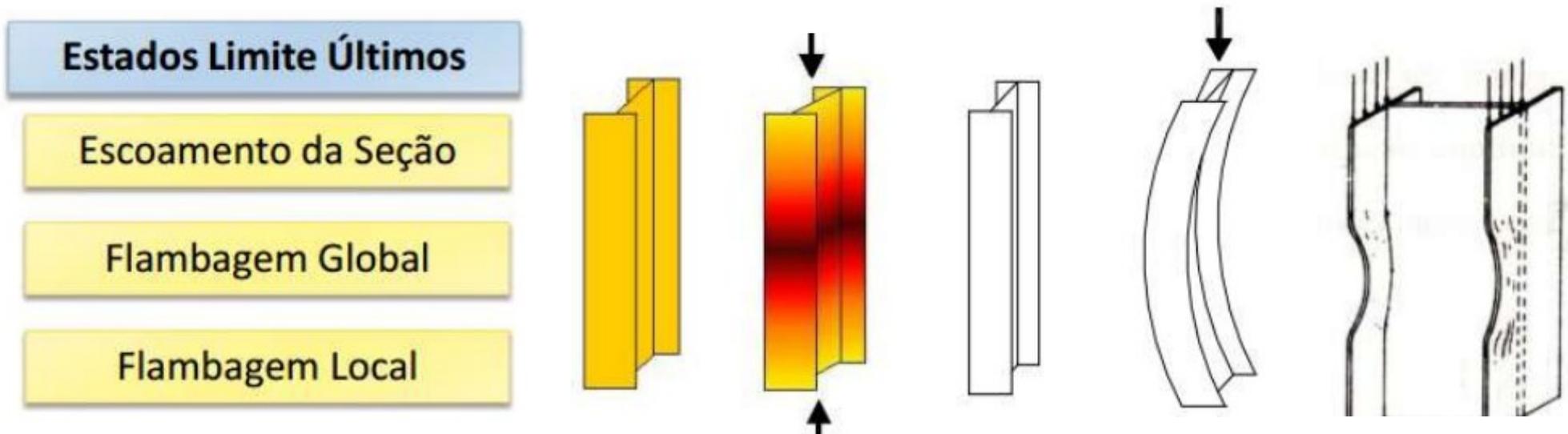
$N_{c,Rd}$ é a força axial de compressão resistente de cálculo, determinada conforme 5.3.2.

Devem ainda ser observadas as condições estabelecidas em 5.3.4, relacionadas à limitação da esbeltez.

2. RESISTÊNCIA DE CÁLCULO PARA BARRAS PRISMÁTICAS COMPRIMIDAS

Aço → Elevada resistência mecânica

Seções reduzidas → Esbeltez elevada



2. RESISTÊNCIA DE CÁLCULO PARA BARRAS PRISMÁTICAS COMPRIMIDAS

NBR 8800:2008 - Item 5.3 - Barras prismáticas submetidas à força axial de compressão – pg 42

5.3.2 Força axial resistente de cálculo

A força axial de compressão resistente de cálculo, $N_{c,Rd}$, de uma barra, associada aos estados-limites últimos de instabilidade por flexão, por torção ou flexo-torção e de flambagem local, deve ser determinada pela expressão:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{al}}$$

onde:

χ é o fator de redução associado à resistência à compressão, dado em 5.3.3;

Q é o fator de redução total associado à flambagem local, cujo valor deve ser obtido no Anexo F;

A_g é a área bruta da seção transversal da barra.

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.1 - Carga crítica de flambagem por flexão

Carga P pequena \rightarrow elemento retilíneo e encurtamento;

Aumento progressivo de P até que \rightarrow elemento sofre flexão súbita com perda da estabilidade \rightarrow **FLAMBAGEM (deflexão lateral)**: a barra não consegue suportar mais acréscimos de força.



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.1 - Carga crítica de flambagem por flexão

- Barra de eixo perfeitamente reto;
- Carga aplicada no centroide da seção transversal;
- Birrotulada;
- A barra mantêm-se com deslocamentos laterais nulos até atingir a carga crítica: carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está na iminência de sofrer flambagem.

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.1 - Carga crítica de flambagem por flexão

- *Força axial de flambagem elástica;*
- *Carga de Euler;*
- *Carga de flambagem elástica;*
- *Carga crítica elástica.*

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.2 - Carga crítica de flambagem por flexão para outras condições de extremidades

- Substituir L por KL → comprimento efetivo de flambagem
- “O comprimento efetivo de flambagem equivale ao comprimento real de uma barra birrotulada, de mesmo material e mesma seção transversal, que tenha a mesma carga crítica de flambagem que a barra real considerada”

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.2 - Carga crítica de flambagem por flexão para outras condições de extremidades

NBR 8800:2008 – Anexo E – Força axial de flambagem elástica e coeficiente de flambagem – pg 121
Tabela E.1 – pg 125

Tabela E.1 — Coeficiente de flambagem por flexão de elementos isolados

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
A linha tracejada indica a linha elástica de flambagem						
Valores teóricos de K_x ou K_y	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
Valores recomendados	0,65	0,80	1,2	1,0	2,1	2,0
Código para condição de apoio						
						Rotação e translação impedidas
						Rotação livre, translação impedida
						Rotação impedida, translação livre
						Rotação e translação livres

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ai^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A} \right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/i)^2}$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Hipóteses de Euler:

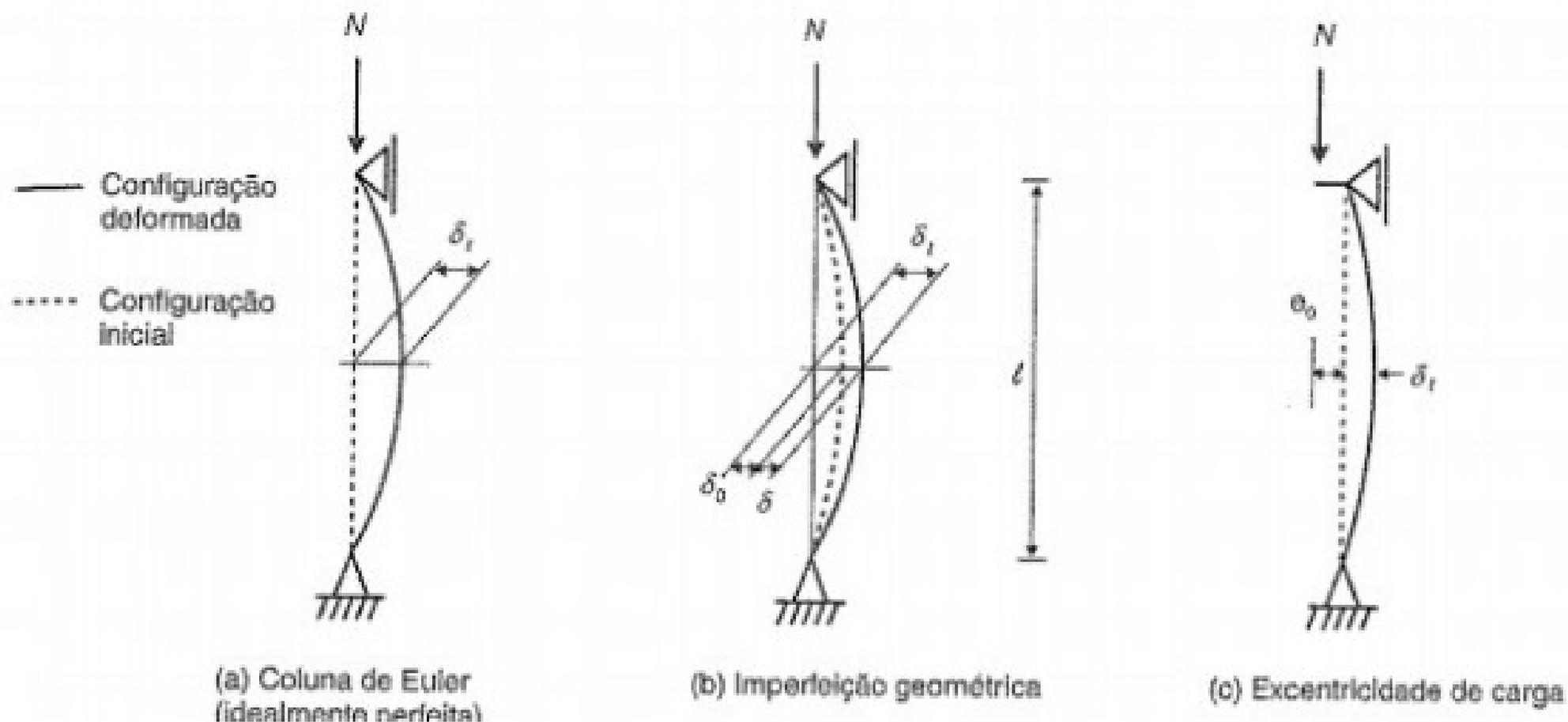
- material indefinidamente elástico
- resistência infinita

Realidade do aço:

- não é indefinidamente elástico
- possui resistência limitada
- tensões residuais do processo de fabricação
- imperfeições geométricas como desvios de retilineidade

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

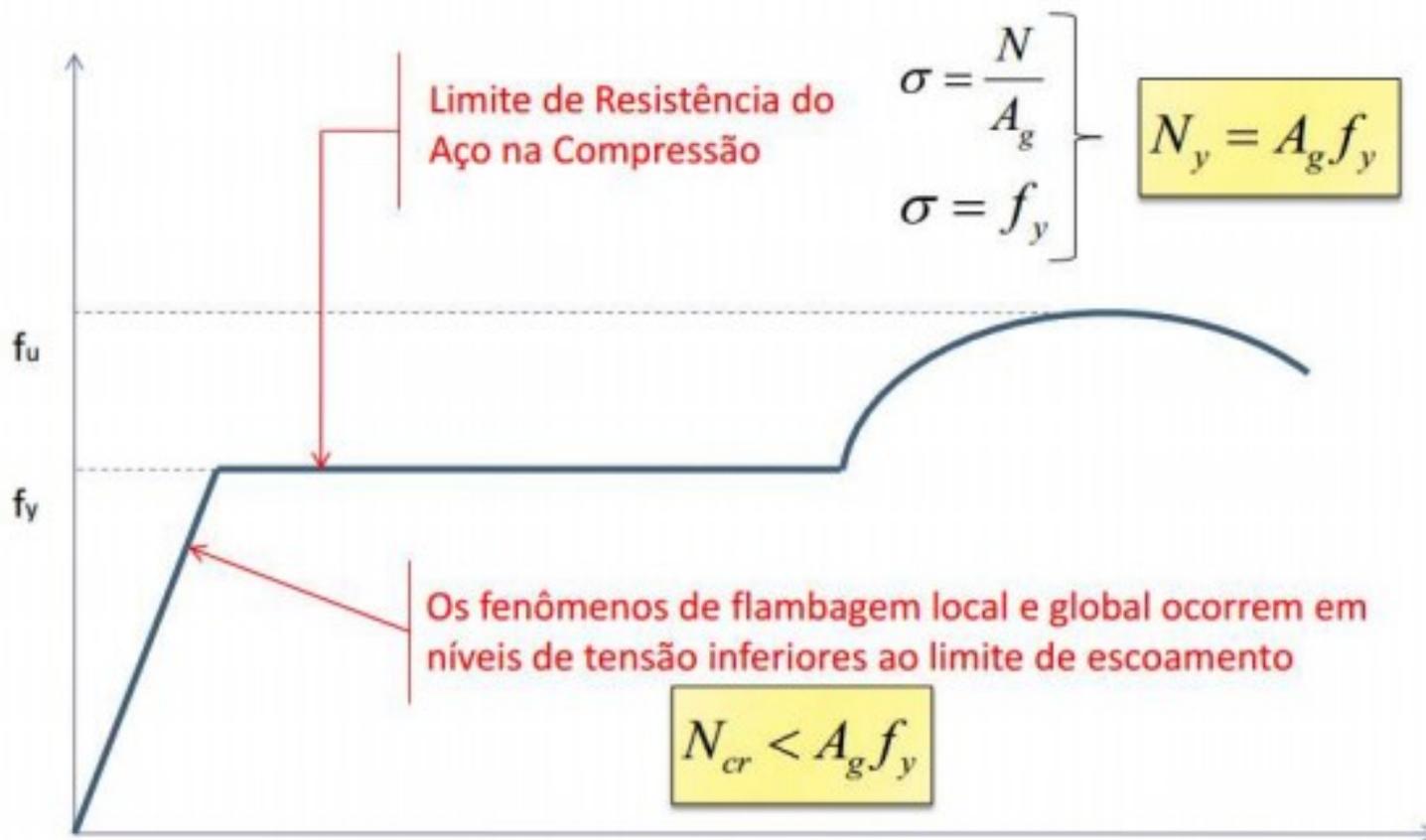
Barras com curvatura inicial

- Valor máximo aceito pela NBR 8800:2008 → flecha de 1/1500 do vão, no meio deste.
- Barras de eixo reto → Eixo indeformável até a força de compressão atingir a força axial de flambagem
- Barra com curvatura inicial → Deslocamento lateral aumentado com o acréscimo da força de compressão.

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Diagrama tensão deformação do aço



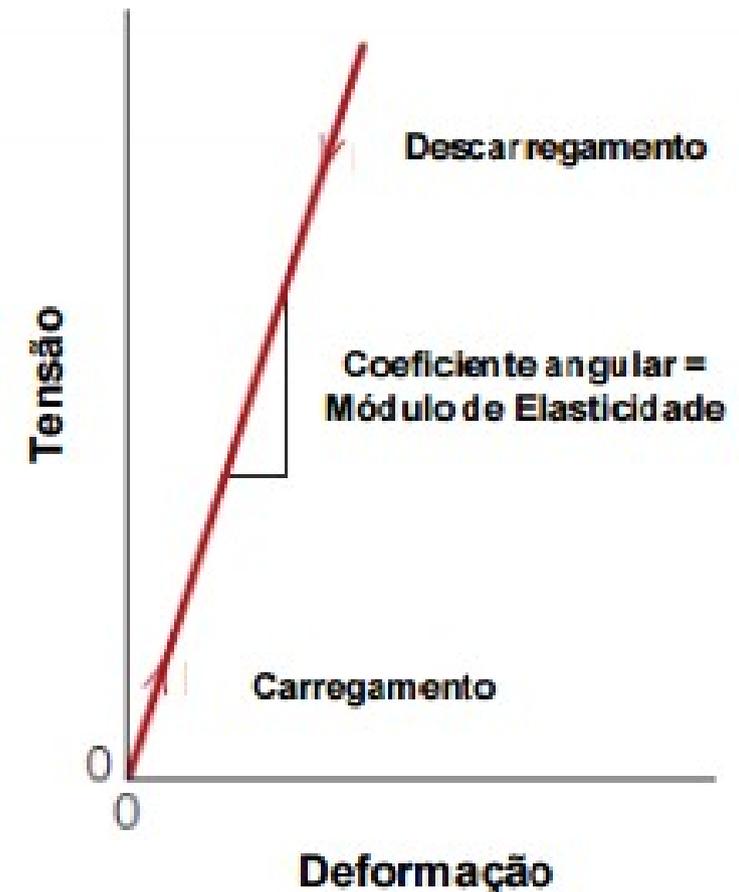
3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Diagrama tensão deformação do aço

O grau com o qual a estrutura cristalina se deforma depende da magnitude da tensão aplicada;

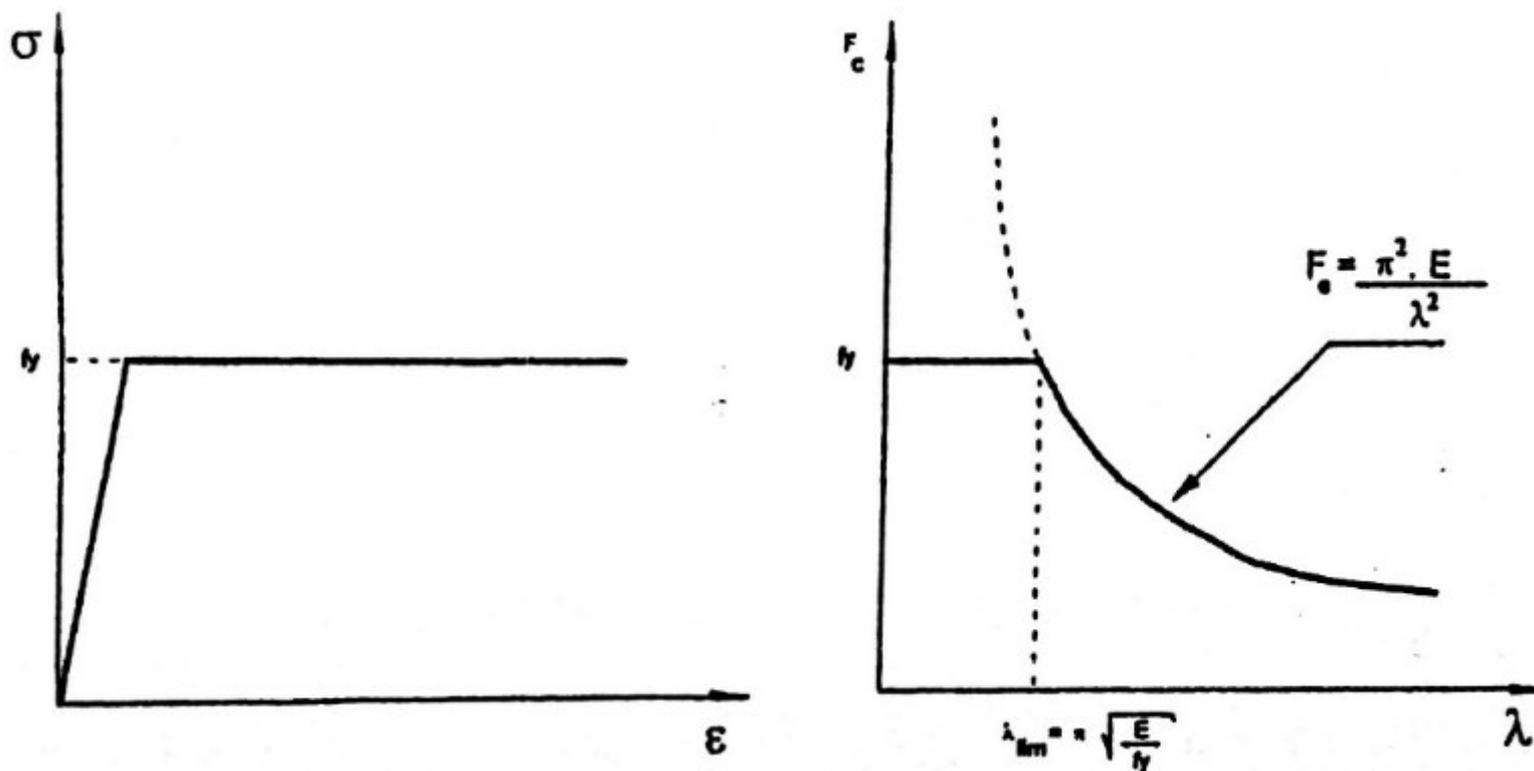
Tensões baixas: relação entre tensão e deformação → lei de Hooke com comportamento linear: $E = \text{Módulo de Elasticidade ou de Young}$



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

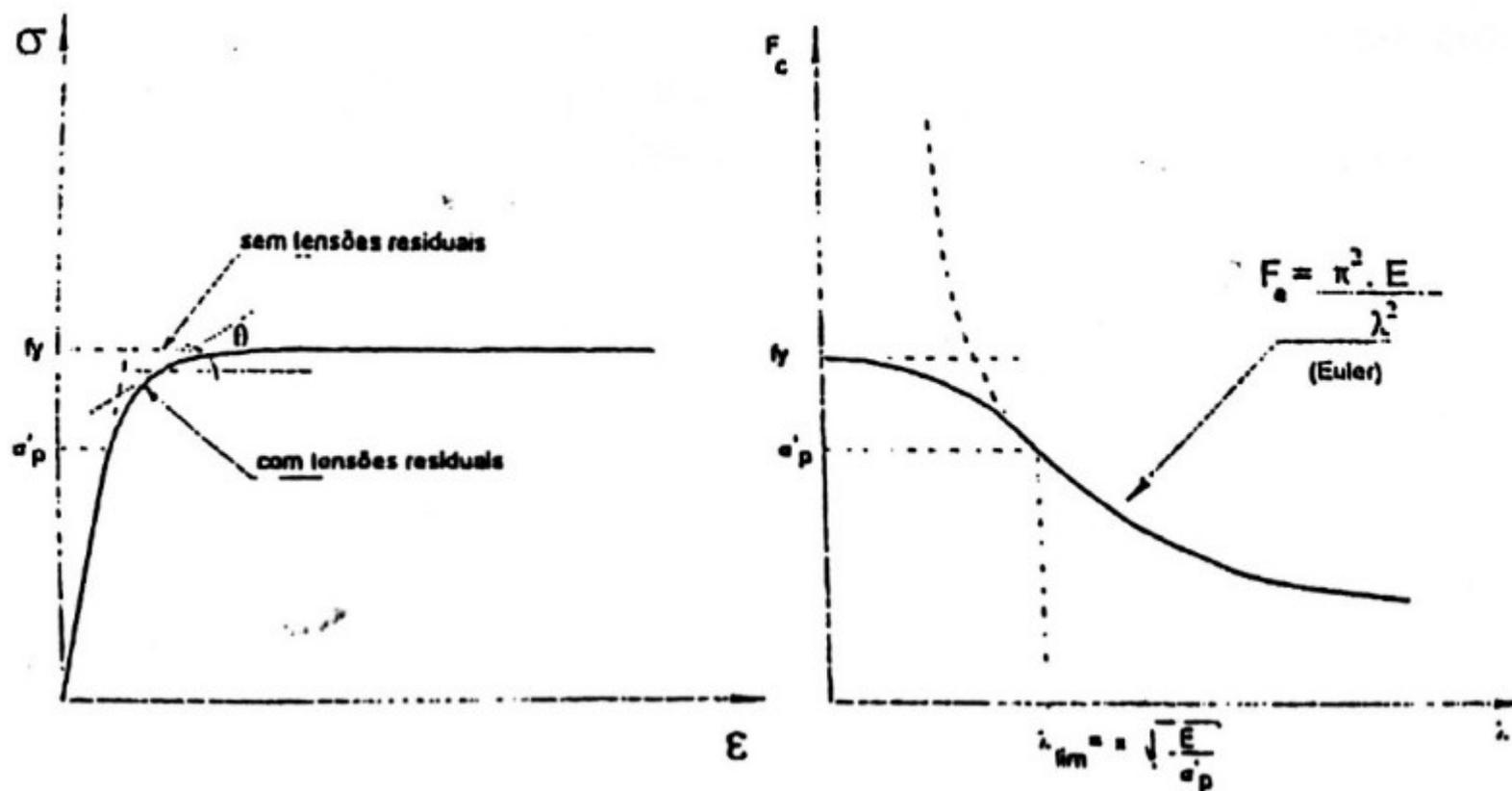
Expressão de Euler válida para $F_e \leq f_y$



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Expressão de Euler válida para $F_e \leq \sigma_p$



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Tensão de proporcionalidade: diferença entre a resistência ao escoamento do aço e máxima tensão residual de compressão.

Usualmente:

$$\sigma_p = f_y - \sigma_p$$

$$\sigma_p = f_y - 0,56f_y$$

$$\sigma_p = 0,44f_y$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Hipérbole de Euler válida em regime elástico

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_p = 0,44 f_y$$

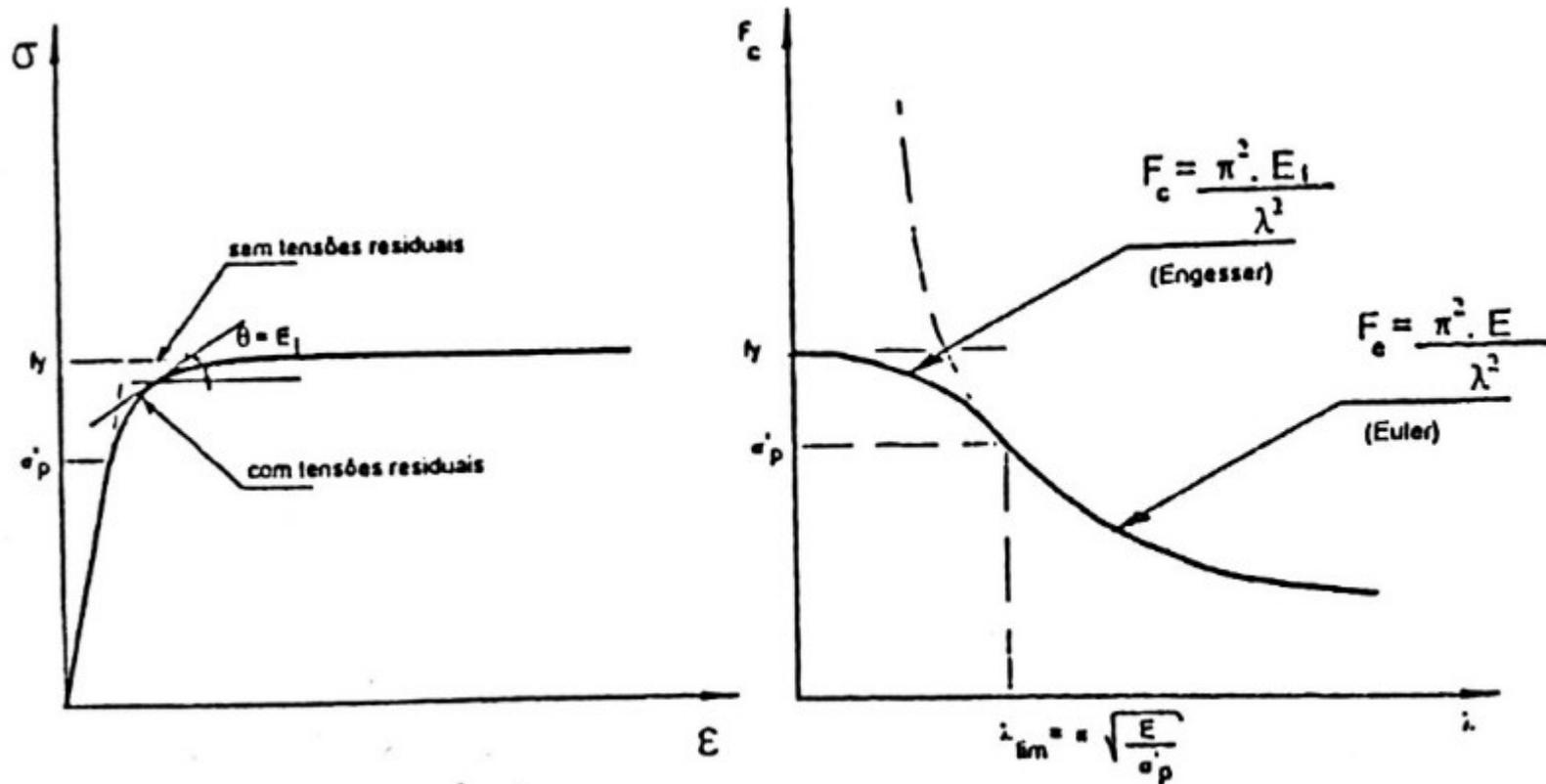
*Explicitando o índice de esbeltez, encontra-se um limite até o qual a flambagem ocorre em regime elástico. Caso contrário, em regime inelástico. **Depende apenas do tipo de aço.*

$$\lambda_{lim} = \sqrt{\frac{2,27 \pi^2 E}{f_y}}$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Resistência a compressão no regime inelástico → Fórmula de Engesser



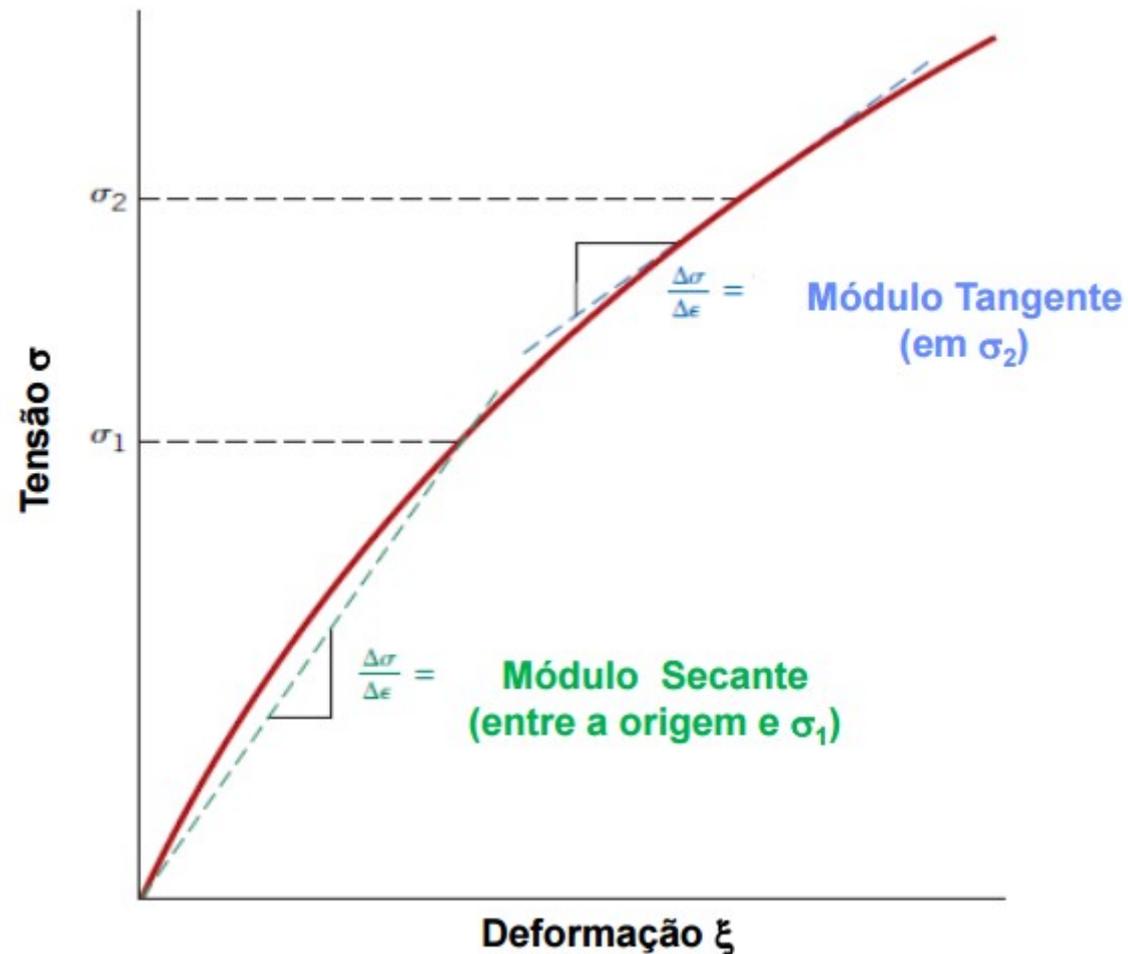
3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Diagrama tensão deformação do aço

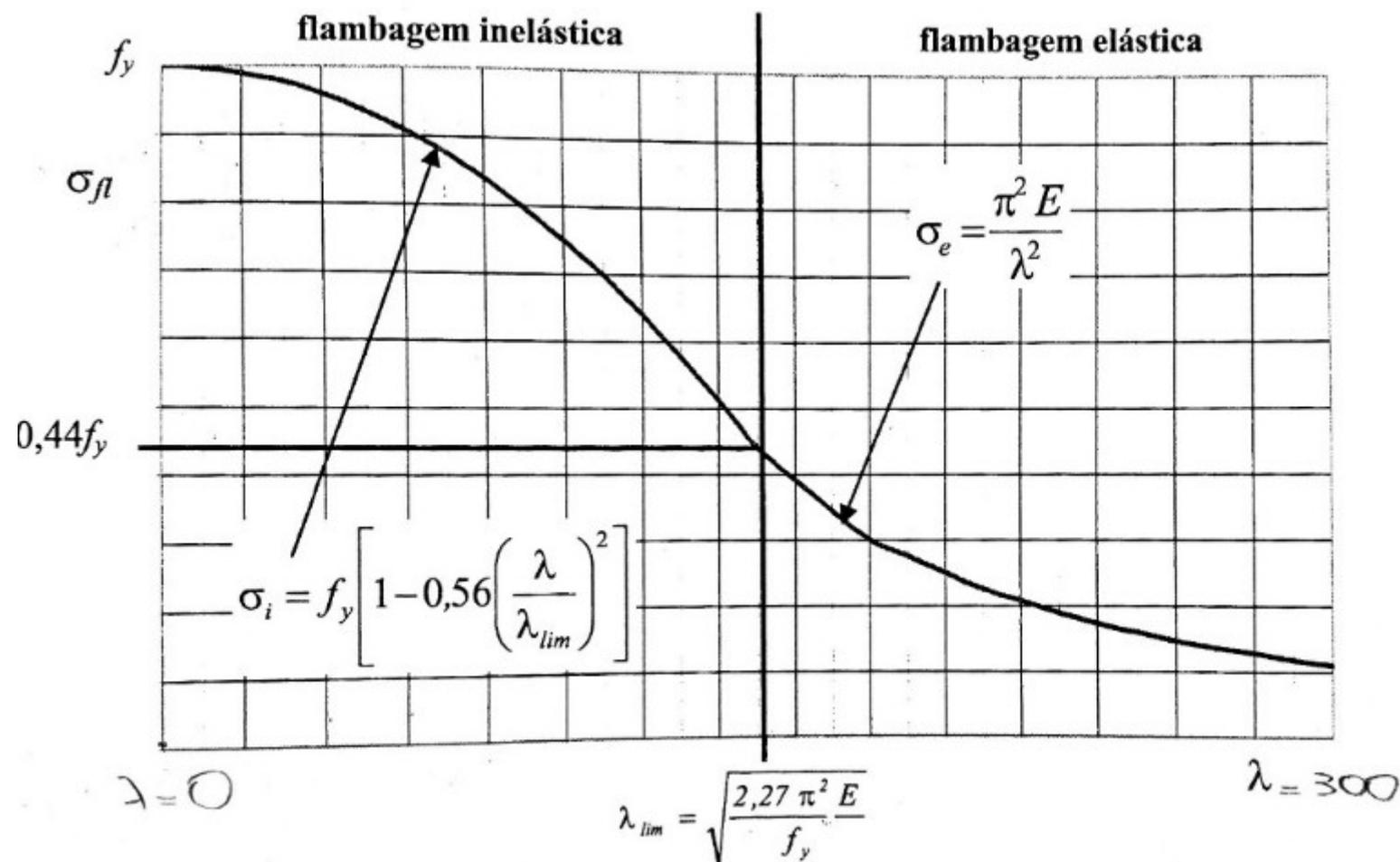
Módulo tangente → em uma determinada tensão

Módulo secante → sempre considerado da origem até um dado valor de tensão



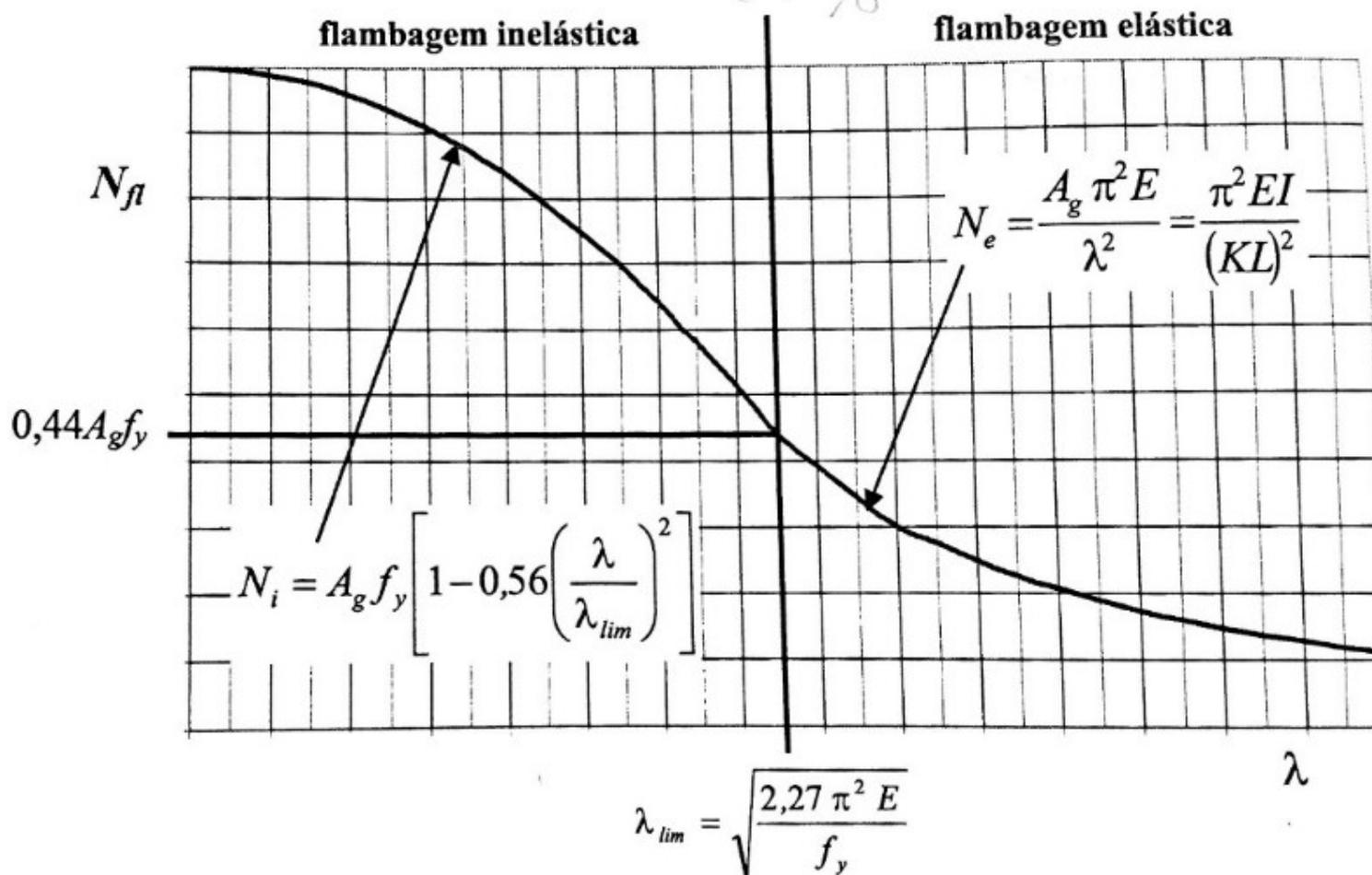
3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão



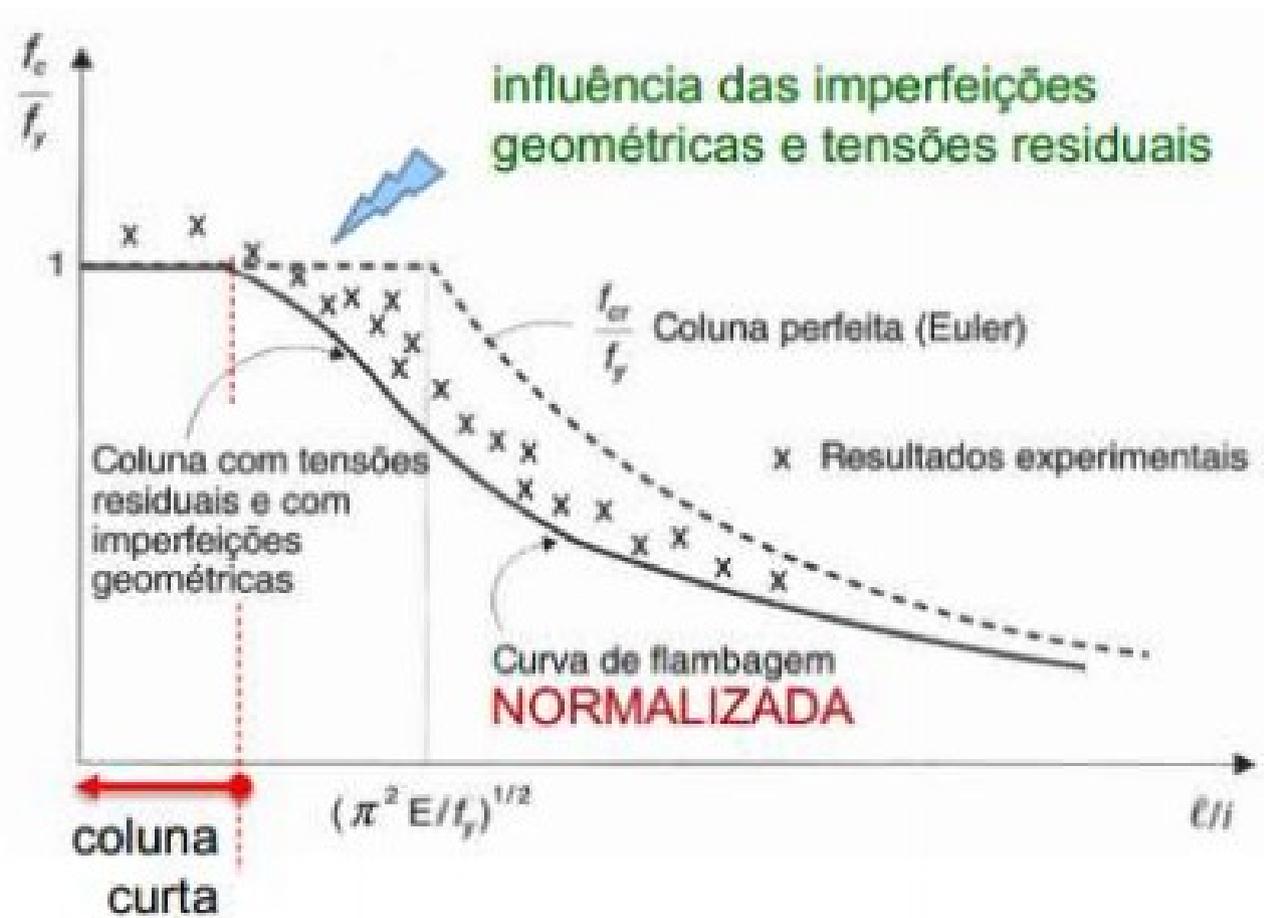
3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

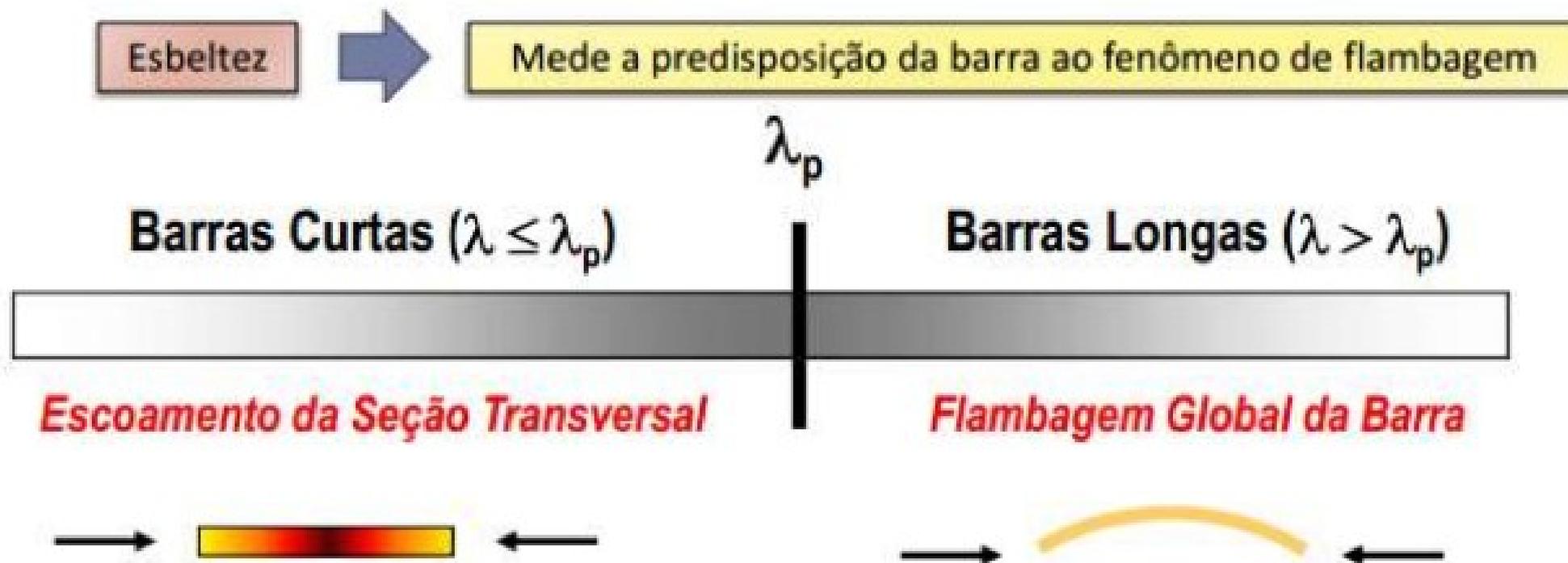
Resumindo:

- Colunas esbeltas → flambagem em regime elástico;
- Colunas de esbeltez intermediária → maior influência das imperfeições geométricas e das tensões residuais;
- Colunas curtas → a tensão última é tomada igual ao escoamento do material.

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

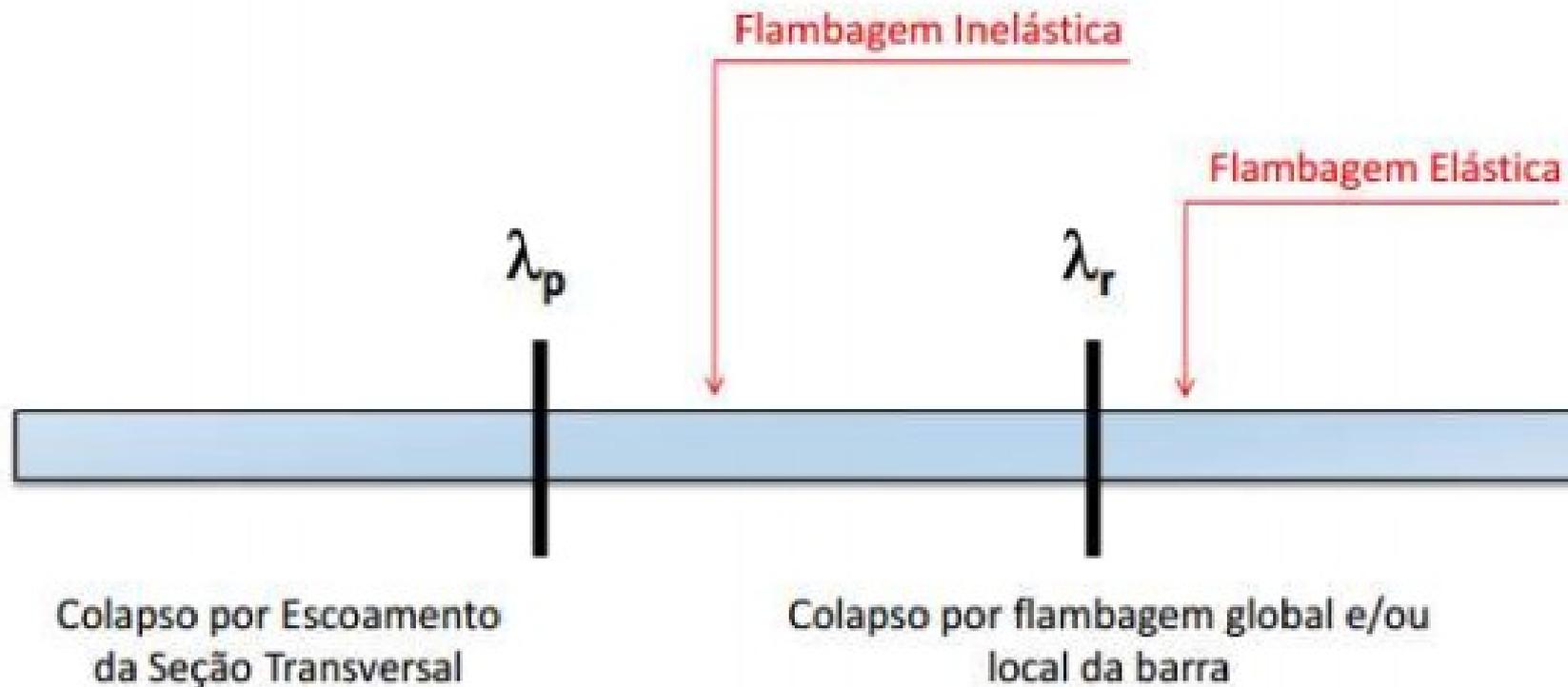
Resumindo:



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Resumindo:



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Módulo tangente E_t depende da curva tensão deformação de σ_p até f_y que depende da distribuição das tensões residuais;

A resistência de elementos de aço submetidos às compressão depende da esbeltez, da tensão de escoamento do aço, do tipo de seção transversal e da interação entre as tensões de compressão, tensões residuais e tensões de flexão causada pela imperfeição inicial do elemento;

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.3 – Tensão crítica de flambagem por flexão

Curvas → Resistência a compressão do elemento de aço em função da esbeltez;

A NBR8800:2008 apresenta uma só curva de resistência a compressão independentemente do tipo de seção transversal e do eixo de flexão em relação ao qual a ruína da peça é analisada. Já outras normas técnicas adotam o conceito das curvas múltiplas de resistência.

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.4 – Curva de resistência a compressão segundo a NBR8800:2008

χ → Fator de redução associado a resistência a compressão, indicativo da força axial resistente de barras comprimidas com curvatura inicial associado ao índice de esbeltez reduzido.

- para $\lambda_0 \leq 1,5$: $\chi = 0,658^{\lambda_0^2}$

- para $\lambda_0 > 1,5$: $\chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2}$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}}$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.4 – Curva de resistência a compressão segundo a NBR8800:2008



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.5 –Força axial de flambagem elástica

NBR 8800:2008 → Anexo E – Força axial de flambagem elástica e coeficiente de flambagem – pág 121

Flambagem por torção:

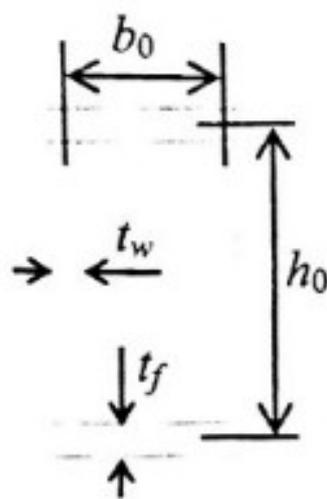
- Depende da rigidez à rotação GJ e a rigidez ao empenamento E_{cw} ;
- Rotação em torno do eixo longitudinal e empenamento (perda da forma plana);
- Nas seções duplamente simétricas, só é necessário verificar a possibilidade de flambagem por torção pura se:
 - 1) Seção aberta e C_w nula (cruciforme, T, tubular)
 - 2) Comprimento de flambagem por torção maior que o de flexão

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

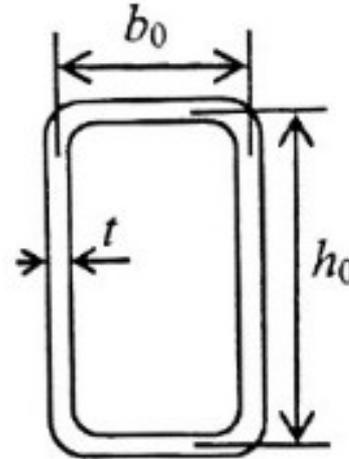
3.5 – Força axial de flambagem elástica

Seções abertas (I, H, U, L, etc.) formadas por retângulos com largura b muito maior que a espessura t

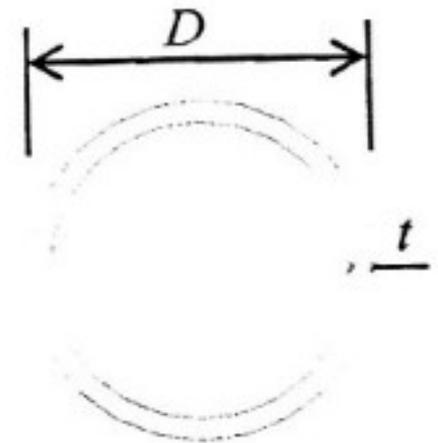
$$J = \frac{1}{3} \sum b t^3$$



$$J = \frac{2 b_0^2 h_0^2}{\frac{b_0}{t_f} + \frac{h_0}{t_w}}$$



$$J = \frac{2 b_0^2 h_0^2}{b_0 + h_0 t}$$



$$J = \frac{1}{4} \pi t D^3$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXTORÇÃO

3.5 – Força axial de flambagem elástica

$$C_w = \frac{h_0^2 I_y}{4}$$

$$C_w = \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{t_{fi} b_{fi}^3 t_{fs} b_{fs}^3}{t_{fi} b_{fi}^3 + t_{fs} b_{fs}^3} \right)$$

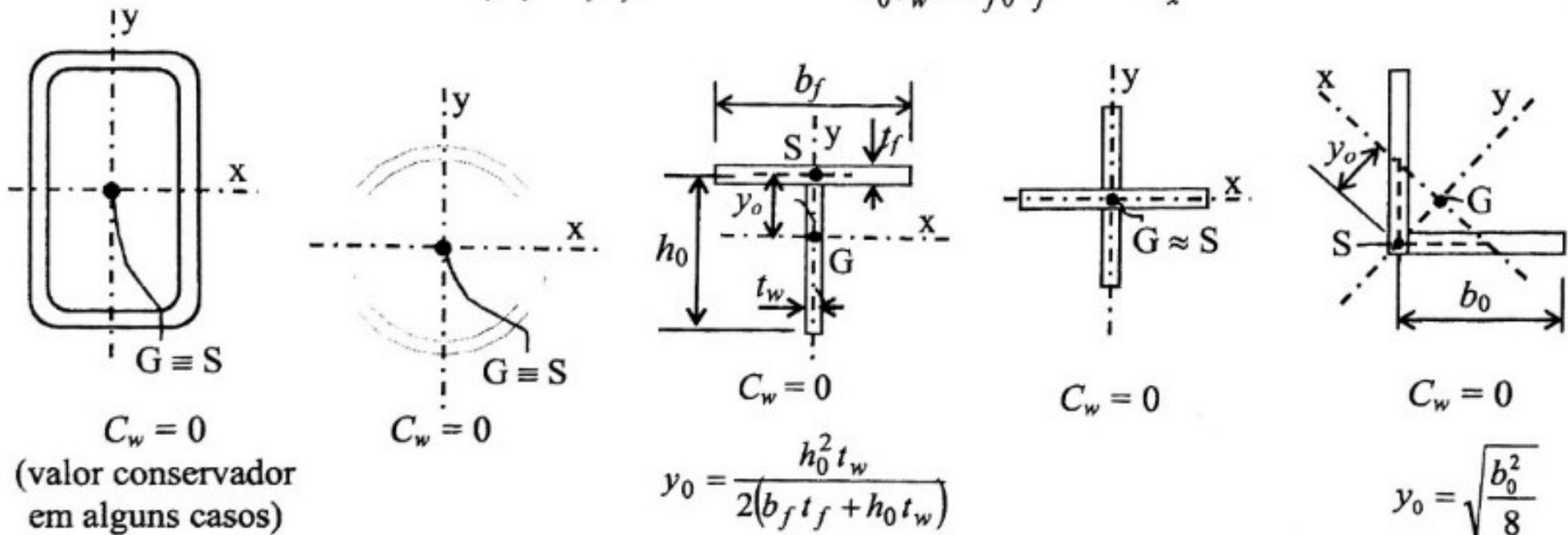
$$y_0 = \frac{h_s t_{fs} b_{fs}^3 - h_i t_{fi} b_{fi}^3}{t_{fs} b_{fs}^3 + t_{fi} b_{fi}^3}$$

$$C_w = \frac{t_f b_{fo}^3 h_0^2}{12} \left(\frac{3b_{fo} t_f + 2h_0 t_w}{6b_{fo} t_f + h_0 t_w} \right)$$

$$x_0 = \frac{b_{fo}^2 t_f}{h_0 t_w + 2b_{fo} t_f} + \frac{b_{fo}^2 h_0^2 t_f}{4I_x}$$

3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

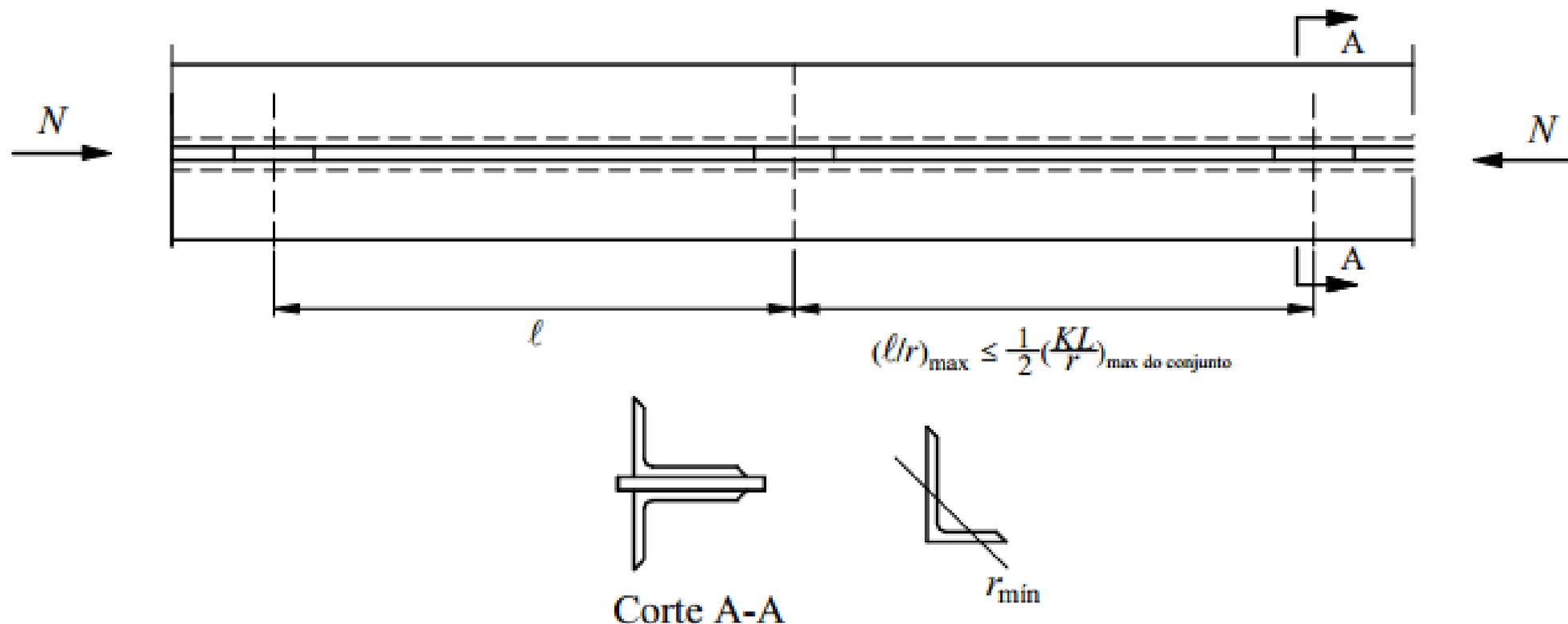
3.5 – Força axial de flambagem elástica



3. INSTABILIDADE POR FLEXÃO, TORÇÃO OU FLEXO TORÇÃO

3.6 – Limitação do índice de esbeltez

NBR 8800:2008 → Item 5.3.4 - Pág 46



4. FLAMBAGEM LOCAL

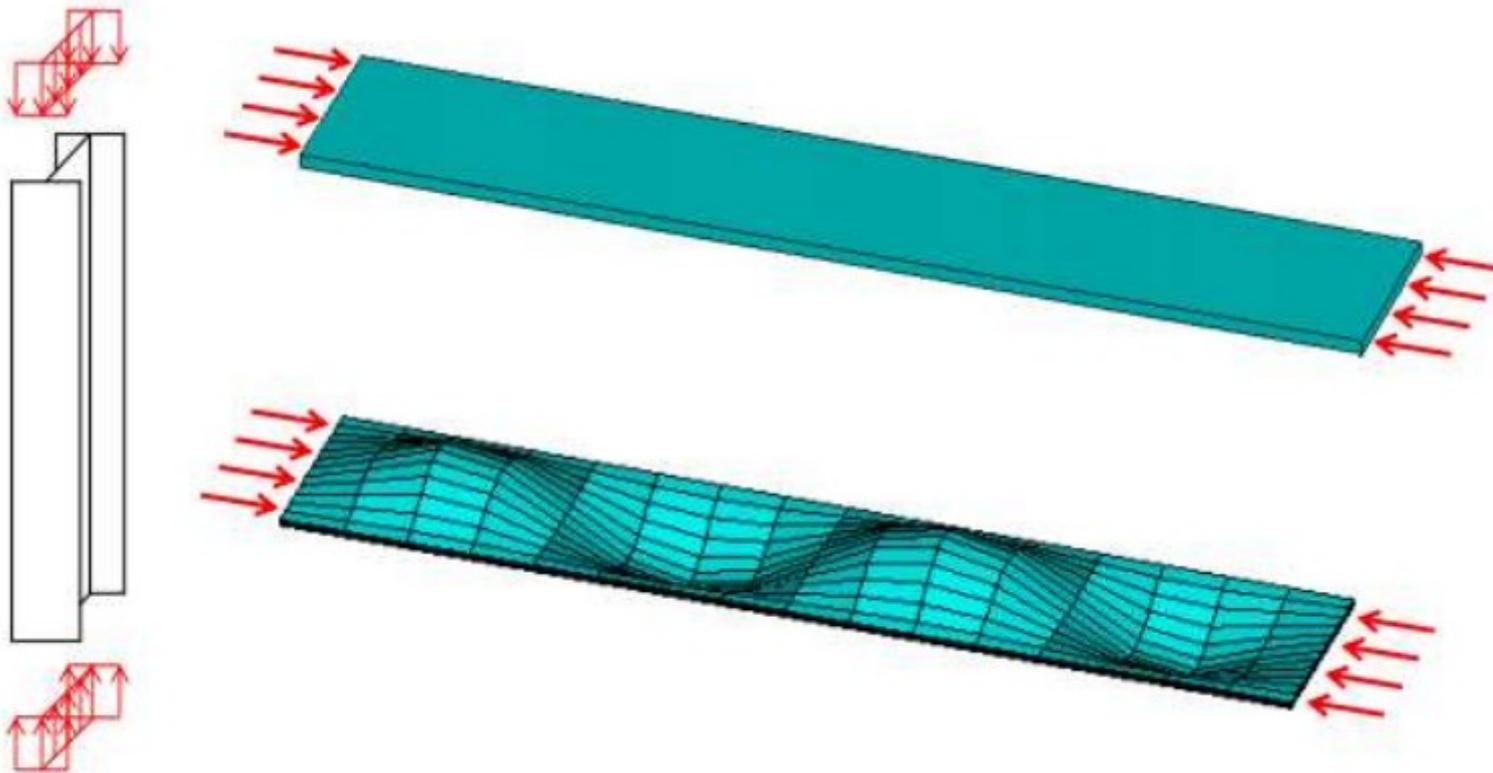
Os perfis usuais usados em estruturas de aço são compostos por chapas planas, que quando submetidas a esforços de compressão podem sofrer flambagem.

NBR8800:2008 – Anexo F – pag. 126

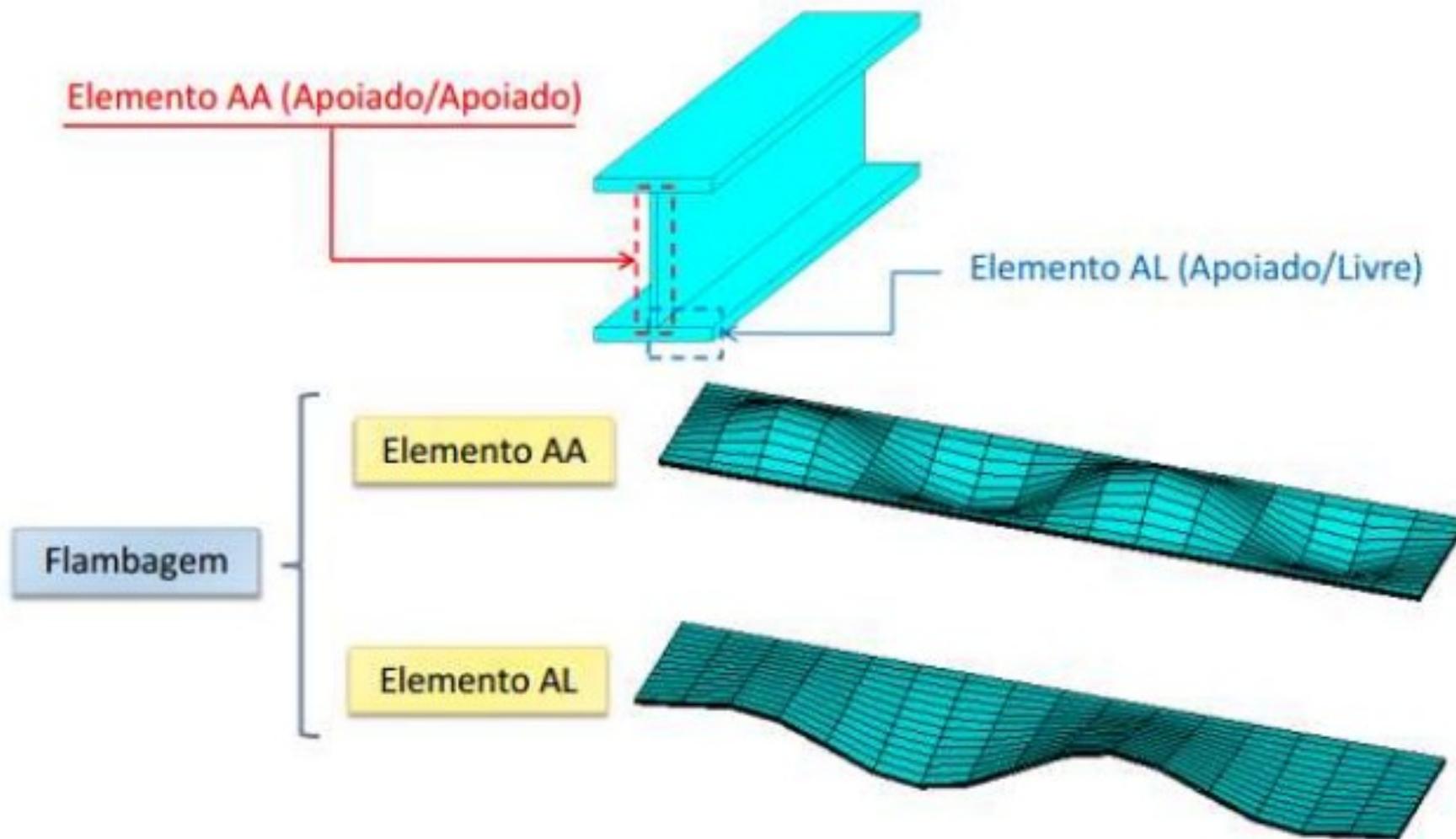
- *Seções usuais → Elementos planos com uma ou duas bordas longitudinais vinculadas;*
- *Os elementos com relação largura/espessura (b/t) reduzida, que não ultrapassam o limite, não estão sujeitos a flambagem local, uma vez que seu escoamento ocorre antes.*

4. FLAMBAGEM LOCAL

São caracterizados pela formação de inúmeras semi-ondas longitudinais sem que a posição média do eixo longitudinal da barra se altere (cantoneira é exceção – apenas uma semi onda).



4. FLAMBAGEM LOCAL



4. FLAMBAGEM LOCAL

Fator de redução total $Q = 1$

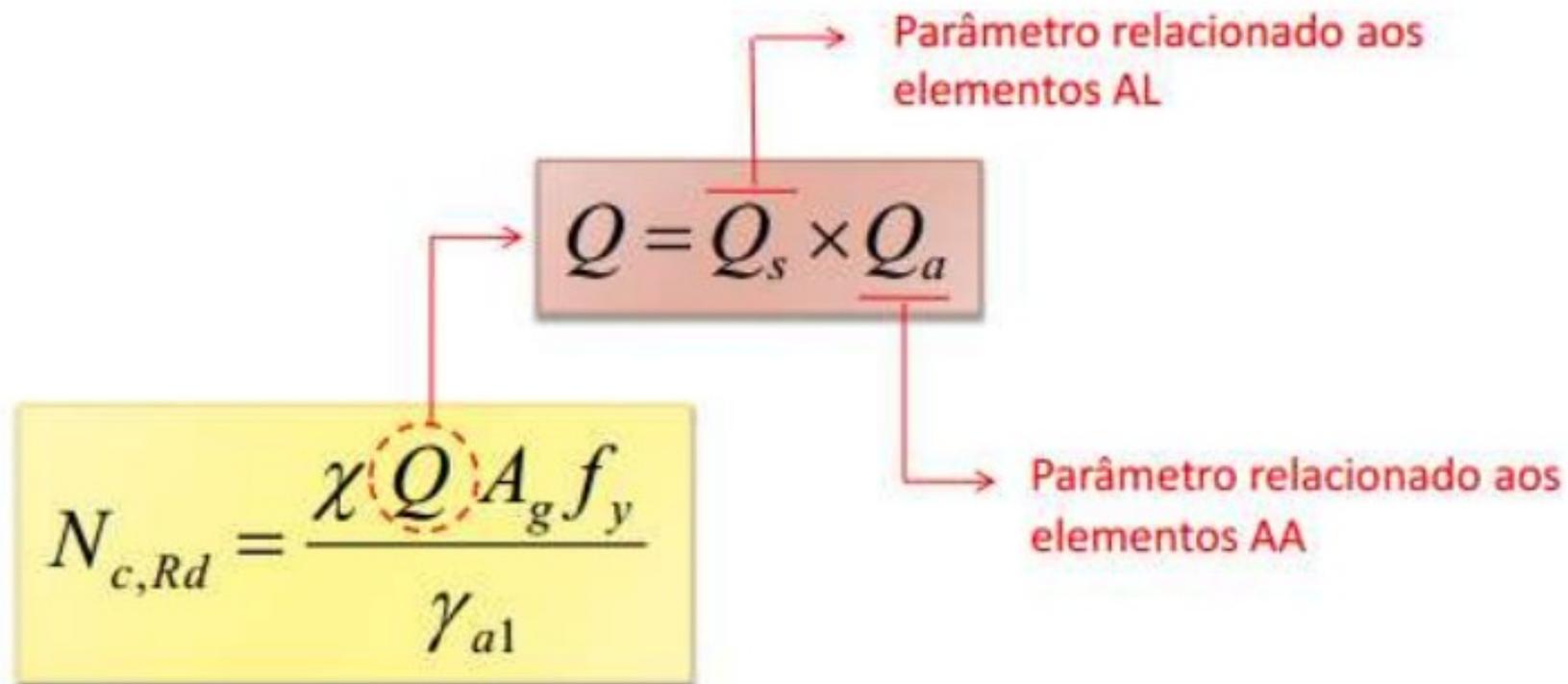
Quando todos os elementos componentes da seção transversal possuem relações entre largura e espessura que não superam os valores dados na tabela F.1

Comportamento diferente em função das bordas vinculadas:

Elementos AA → Apoiado Apoiado → Duas bordas vinculadas

Elementos AL → Apoiado Livre → Uma borda vinculada

4. FLAMBAGEM LOCAL

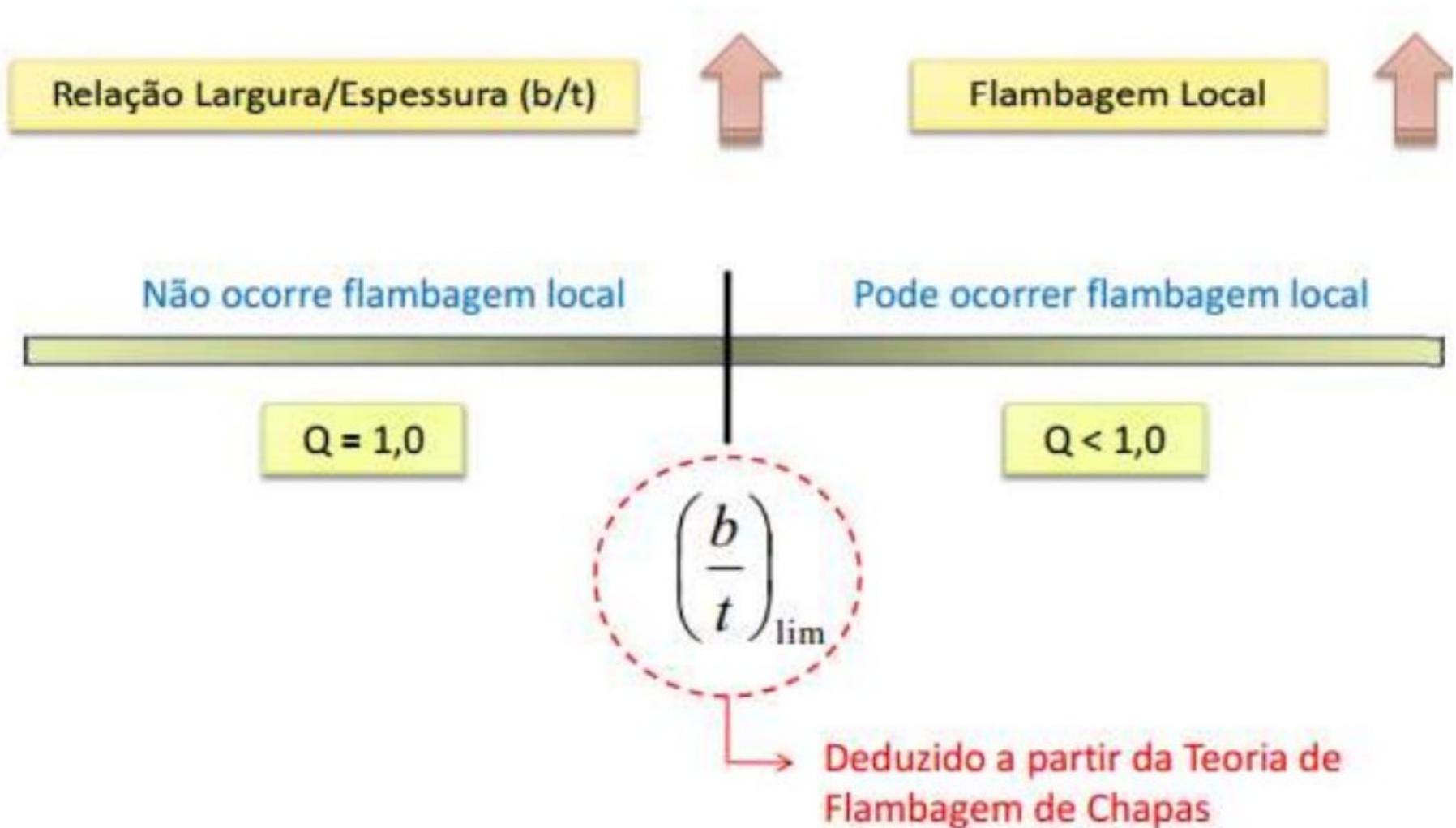


Parâmetros Considerados

Relação Largura/Espessura do Elemento (b/t)

Vinculação da chapa Tipo de Elemento (AA ou AL)

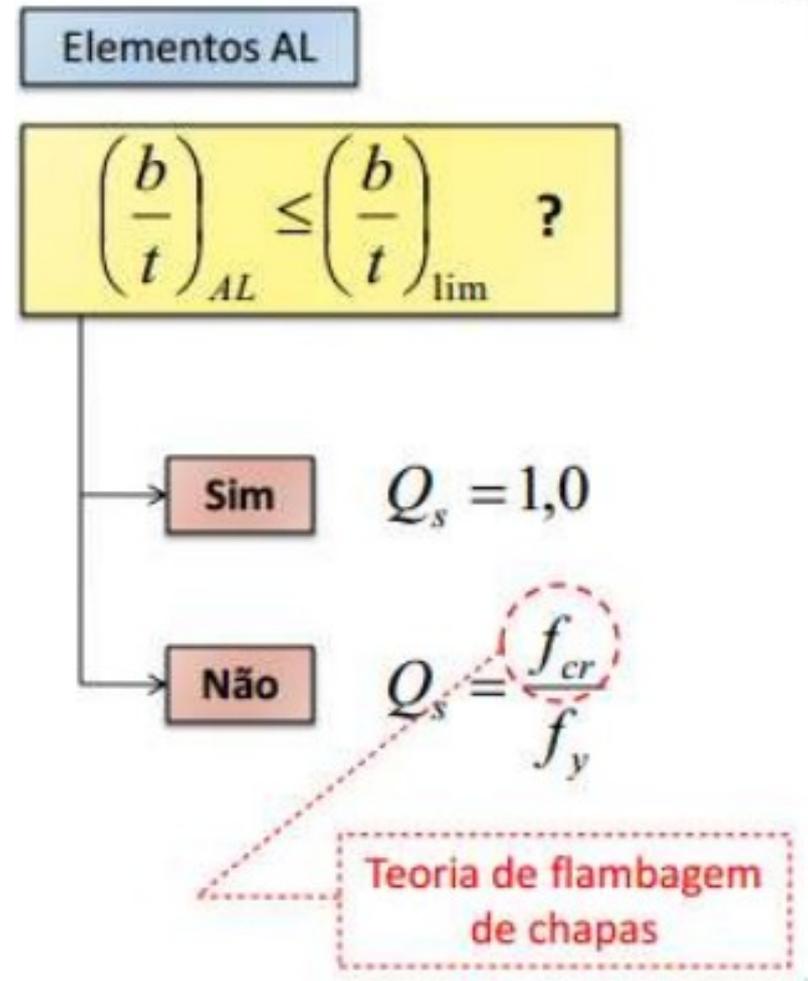
4. FLAMBAGEM LOCAL



4. FLAMBAGEM LOCAL

Elementos comprimidos AL:

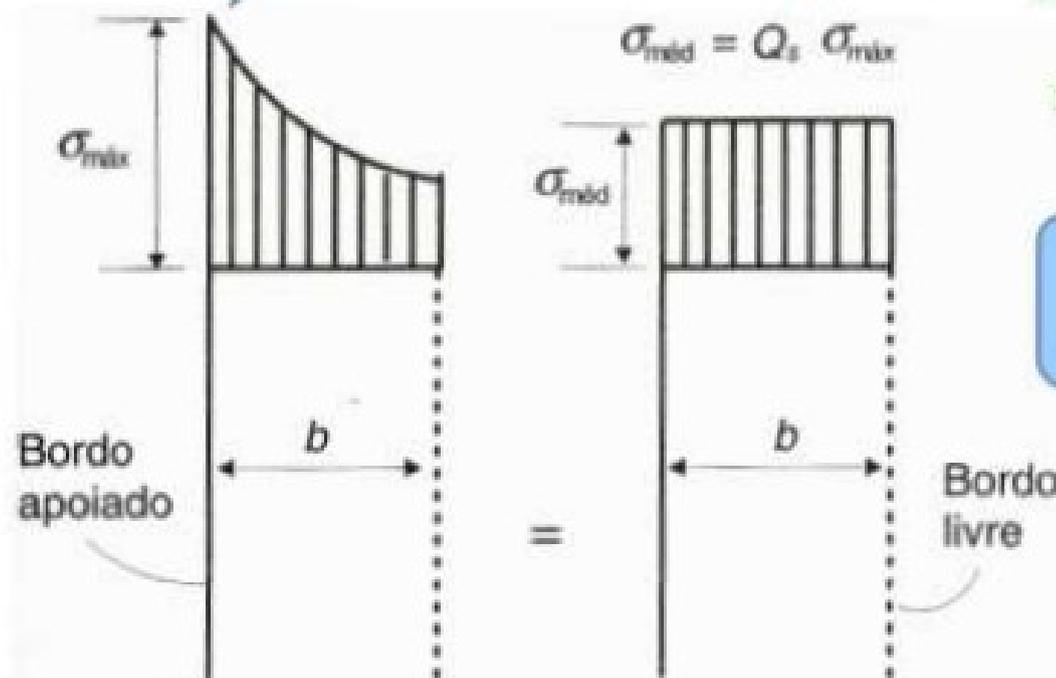
- Quando um elemento comprimido AL sofre flambagem, esta parte da seção transversal deixa de contribuir com a resistência a compressão da barra;
- Parâmetro Q_s : mais de um elemento com fator de redução $Q_s \rightarrow$ adotar o menor.



4. FLAMBAGEM LOCAL

Elementos comprimidos AL:

Variação das tensões
devida à instabilidade,
havendo concentração
junto ao bordo apoiado



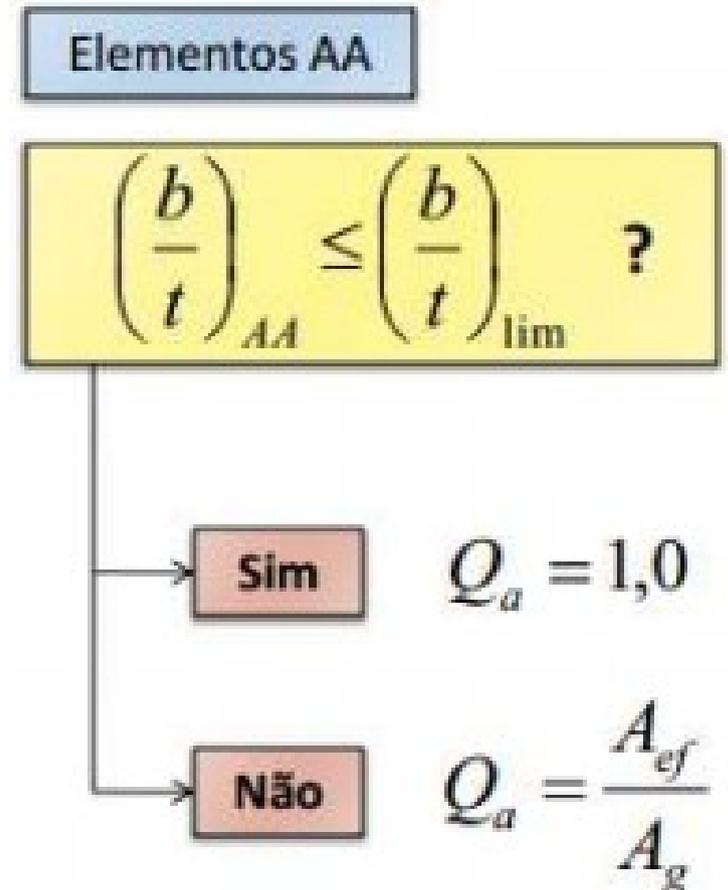
Logo, o dimensionamento é
feito numa situação
pré-flambagem,
considerando-se
uma tensão
média reduzida

$$Q_s < 1$$

4. FLAMBAGEM LOCAL

Elementos comprimidos AA:

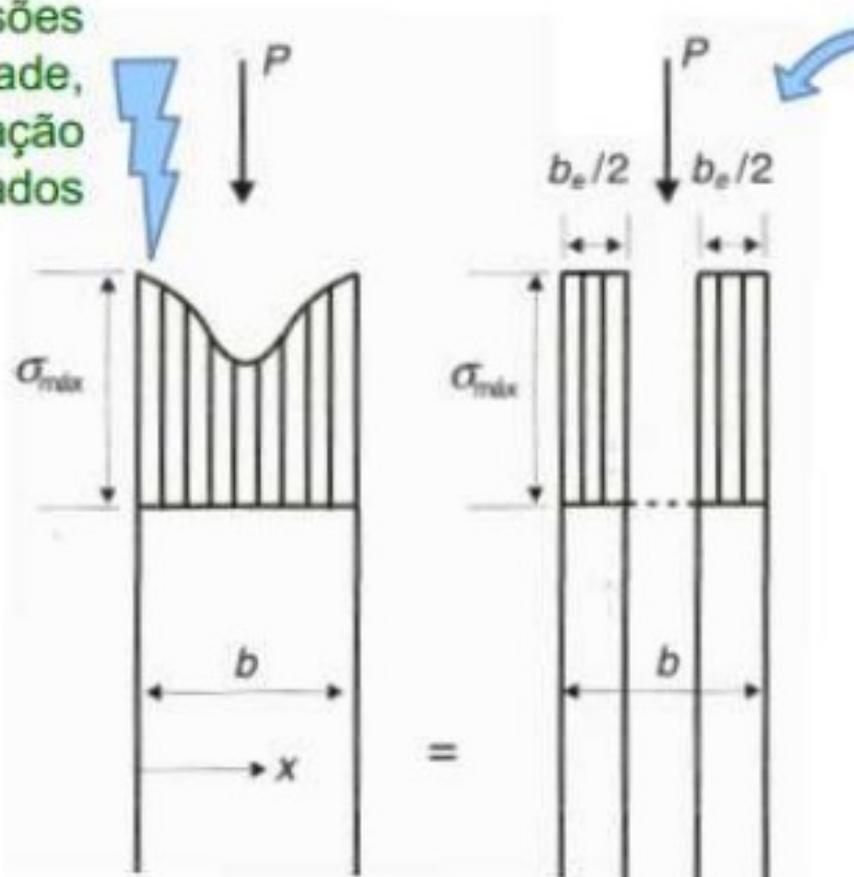
- A flambagem do elemento AA não implica no colapso da chapa, mas limita a resistência a compressão axial do elemento → grande resistência pós flambagem;
- Parâmetro Q_a → determina o fator de redução em função da relação entre a área efetiva da seção (larguras efetivas) e a área bruta.



4. FLAMBAGEM LOCAL

Elementos comprimidos AA:

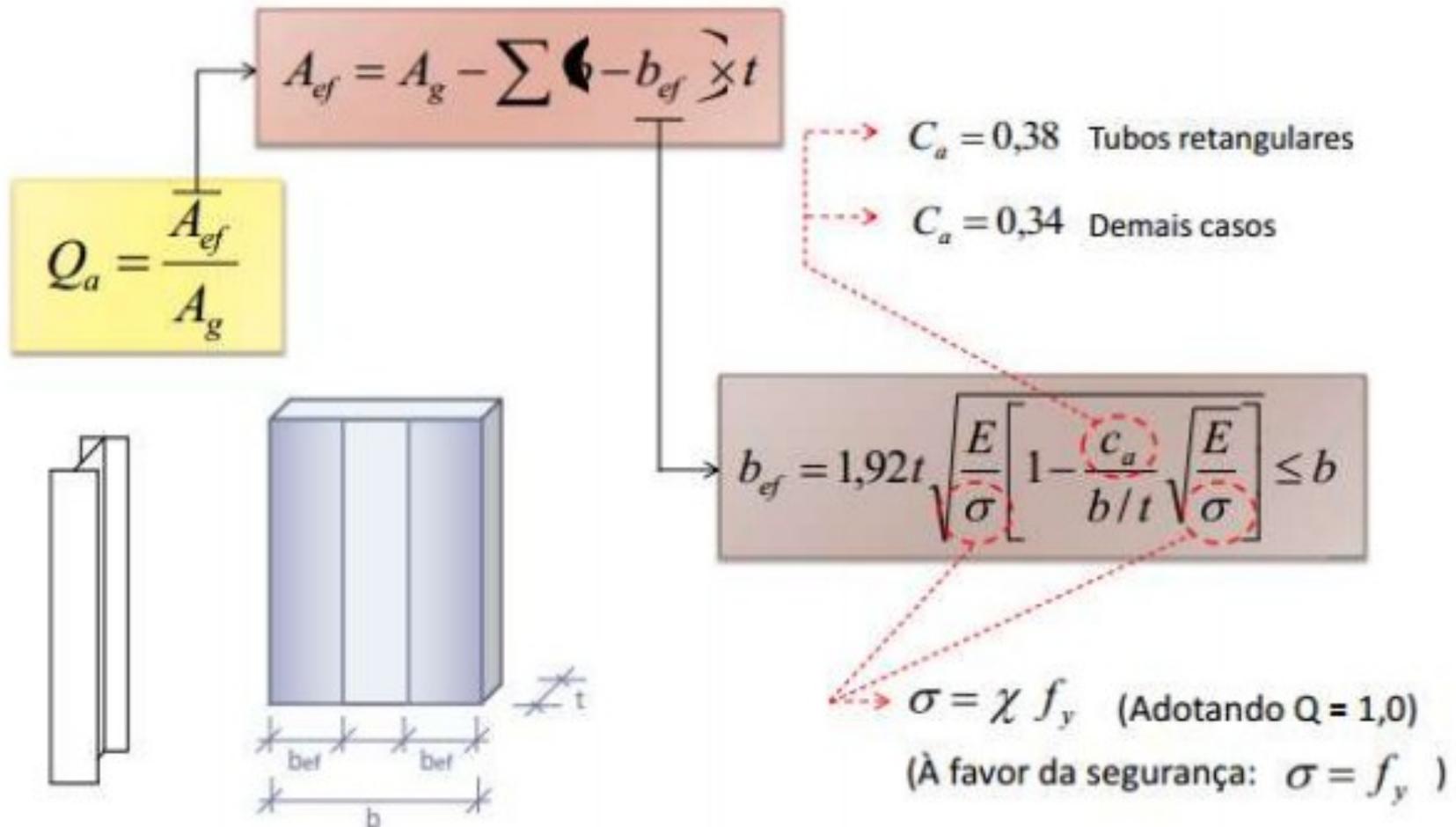
Varição das tensões devida à instabilidade, havendo concentração nos bordos apoiados



Consideração de uma largura efetiva resistente:

4. FLAMBAGEM LOCAL

Elementos comprimidos AA:



4. FLAMBAGEM LOCAL

RESUMINDO:

Anexo F da NBR- 8800: 2008

Tabela F.1: Valores de $(b/t)_{lim}$

$$\text{> } (b/t) \leq (b/t)_{lim} \rightarrow Q = 1,0$$

$$\text{> } (b/t) > (b/t)_{lim} \rightarrow Q = Q_a Q_s$$

> Q_a : Associado a elementos AA (item F.3)

> Q_s : Associado a elementos AL (item F.2)

> Seções tubulares: item F.4

BIBLIOGRAFIA

- 1) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800:2008 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008.
- 2) Dimensionamento de barras comprimidas – Notas de aula – UFV.
- 3) FAKURY, R. H. SILVA, A. L. E. C. CALDAS, R. B. Dimensionamento básico de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto. UFMG, Belo Horizonte, 2014, Versão 9.