

Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia - ICET

Relatório de Atividades de Projeto de Pesquisa
Pós Doutorado CAPES no Exterior

Projeto **Modelos Matemáticos para Dispersão de Sementes**
com aplicação em Dispersão de Espécies e Invasão
Biológica

Profa Dra Jaqueline Maria da Silva
Vigência do Relatório: 01/06/2017 a 30/11/2018

University of Leicester - Leicester - United Kingdom
Janeiro/2019

Sumário

1	Dados do Projeto	3
2	Resumo	4
3	Introdução	5
4	Objetivos	6
5	Metodologia	7
6	Plano de Trabalho Proposto	9
6.1	Plano de Trabalho Executado	11
6.2	Modelo M_1	11
6.3	Simulações	14
6.4	Estudos sobre a Mortalidade	30
6.4.1	Mortalidade em 3%	30
6.4.2	Mortalidade de 70%	33
6.5	Plano de Trabalho Executado	37
6.6	Atividades Realizadas	39
7	Produção Científica no Período	42
8	Considerações Finais	47
8.1	Contribuição da Pesquisa para o Ensino	47
8.2	Potencial para o aumento da rede de pesquisa	47
8.3	Relevância da realização da pesquisa no exterior	48
9	Referências Bibliográficas	49

1 Dados do Projeto

Projeto: Edital do Programa de Pós-doutorado 2016. Processo 88881.120630/2016-01 227 - Pesquisa Pós-doutoral no Exterior

Submetido ao: Estágio Pós-Doutoral - Edital nº 15/2016

Coordenador do Projeto: Sergei Petrovskii

Instituição de Execução do Projeto: Universidade de Leicester. Leicester. Inglaterra. Reino Unido.

Vigência: 01 de Junho de 2017 a 30 de Novembro de 2018

Dados do pós-doutorando: Profa Dra Jaqueline Maria da Silva

Formação profissional: Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo - UFES. Mestrado e Doutorado em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC.

Atuação profissional atual: Professora Adjunta C Nível 3 do Instituto de Ciências, Engenharia e Tecnologia da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, a UFVJM, Campus Mucuri. Tel 33 3529-2935

email: jaqueline.silva@ufvjm.edu.br

Endereço profissional: Rua do Cruzeiro, 01. Jardim São Paulo. Teófilo Otoni - MG. CEP 39800-370.

Dados da orientador: Sergei Petrovskii

Formação profissional: Matemático com formação de 30 anos dedicados à modelagem de fenômenos naturais, sendo 25 anos dedicados aos estudos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares com aplicações à Ecologia e Complexidade de Sistemas Ecológicos.

Atuação profissional atual: Professor Titular do Departamento de Matemática da Universidade de Leicester.

Endereço profissional: University Road. Leicester, LE1 7RH. Tel: +44 (0)116 252 3916

email: sp237@le.ac.uk.

Observação 1. *Este relatório de atividades contém a descrição das atividades realizadas durante o afastamento do Campus Mucuri para a University of Leicester no período de 01 de Junho de 2017 a 30 de Novembro de 2018. Contém, inclusive, a descrição de algumas atividades relacionadas à finalização das orientações de estudantes de mestrado, de estudantes de iniciação científica e algumas publicações, oriundas da finalização de algumas atividades pendentes que foram finalizadas junto à UFVJM.*

2 Resumo

O uso de distintas ferramentas e técnicas de modelagem matemática e computacional para representar e compreender melhor os fenômenos ambientais tem se destacado nos últimos anos na comunidade científica acadêmica mundial.

A modelagem apresenta-se como uma ferramenta eficiente de estudo pois contempla a inserção de parâmetros intrínsecos de cada fenômeno estudado, principalmente quando trata de dinâmica de populações vegetais e animais.

Este relatório técnico de pesquisa apresenta alguns resultados de testes executados em um modelo computacional para a dinâmica da vegetação que foi analisado e discutido com o Prof Sergei Petrovskii na Universidade de Leicester. É o resultado de uma parceria entre pesquisadores brasileiros e britânicos que trabalham com modelos ambientais para aprimorar técnicas de modelagem de fenômenos de dispersão de populações, particularmente de sementes, assim como problemas que envolvem a dispersão e a invasão biológica de espécies vegetais e animais.

Palavras-chave: Dispersão de sementes, populações arbóreas, dinâmica da vegetação, modelos baseados no indivíduo, modelos probabilísticos, densidade arbórea, taxa de mortalidade.

3 Introdução

A atividade humana, e as necessidades das sociedades humanas, tornam maior e mais urgente a cada dia, a importância de compreendermos os fenômenos ambientais, para que possamos gerenciar estes recursos de forma condigna. Na Região Amazônica, uma das paisagens mais complexas do planeta, e em suas áreas alagáveis em particular, esta compreensão é vital. A modelagem computacional é aqui ferramenta valiosa de estudo pois contempla a inserção de parâmetros intrínsecos a cada componente do fenômeno estudado, bem como a inspeção de seu comportamento a longo e longuíssimo prazo, principalmente quando trata de dinâmica de populações vegetais e animais.

Todavia, a modelagem dos processos que ocorrem em sistemas ambientais de difícil acesso, como os acima referidos, apresenta grandes dificuldades tanto na implementação computacional como na validação dos modelos, independentemente da metodologia de pesquisa ou técnica de modelagem utilizada, devido a três fatores principais. Primeiro, a alta complexidade do mais simples de seus ecossistemas — elementos fundamentais das paisagens que produzem recursos naturais. Segundo, a estreita interdependência entre os ecossistemas de um sistema ambiental. Terceiro, quando se fala de sustentabilidade, vislumbra-se conhecer acontecimentos a longo prazo, [3]. Em particular, busca-se formas de utilizar recursos produzidos pelo ambiente de maneira a garantir sua disponibilidade para as gerações futuras. Por isso, a modelagem de processos ambientais para análises de sustentabilidade deve, além de contemplar interações entre o homem (em seu aspecto social) e a natureza, [26], garantir a representação das variações de um determinado recurso ou população por longos intervalos de tempo.

Este projeto propõe o aprimoramento de um modelo matemático-computacional para a dinâmica de populações vegetais, que depende de poucos dados para sua inicialização. Ele inova as técnicas tradicionais de modelagem de vegetação por introduzir um acoplamento entre os modelos de dispersão e de ciclo-vital sómente por meio das sementes: um produz, o outro distribui; e por serem ambos estocásticos.

O fenômeno de dispersão é representado no modelo por autômatos celulares (AC) não-determinísticos e os ciclos vitais por modelos compartimentais com transição probabilística; ambos amplamente abordados na literatura em outros domínios de estudo [4].

Neste relatório de pesquisa, a discussão a respeito do aprimoramento do modelo M_1 , apresentado detalhadamente em [3], se dará através de uma melhor utilização das funções de probabilidade visando análises sobre a densidade da população arbórea. Apresenta-se e discute-se dados obtidos a partir de inúmeras simulações do modelo M_1 considerando diversas variações de vários parâmetros do modelo. Discute-se também a possibilidade de analisar a dispersão de sementes considerando valores maiores para alcances e distâncias na equação de dispersão de sementes, visando assim, buscar uma melhor representação de alguns efeitos de agentes geofísicos (enchentes, ventos, fluxos etc) e biológicos no processo de dispersão das sementes.

4 Objetivos

O projeto de pesquisa do qual este relatório faz parte, buscou e ainda busca contribuir para o desenvolvimento da modelagem matemática e computacional da dinâmica de processos naturais em sistemas ambientais, aprimorando o modelo descrito em [3] de forma que o mesmo tenha boa representatividade numa gama maior de fenômenos.

Esta busca foi realizada incluindo-se no modelo M_1 alguns parâmetros para a representação do efeito de dispersão espacial, de ciclos-vitais, e de invasão biológica desenvolvidas recentemente [6, 7, 8, 9]. Esses estudos são re-escritos em termos de autômatos celulares e da versão discretizada em compartimentos de modelos de evolução populacional como em [1, 23].

Colateralmente ao desenvolvimento do modelo ambiental para estudos de populações arbóreas M_1 e à aquisição de novos conhecimentos, foram estabelecidos contatos visando a colaborações científicas de longa duração com o renomado grupo de pesquisa em biomatemática da Universidade de Leicester, coordenado pelo Prof Dr. Sergei Petrovskii, e à propagação do conhecimento nele contido a alunos e colaboradores.

Esta colaboração visa o fortalecimento de distintas habilidades profissionais necessárias para consolidar a carreira de pesquisador para que consiga alcançar destaque científico no meio acadêmico nacional e internacional a longo prazo.

5 Metodologia

Para estudar a distribuição espacial de sementes e o crescimento de sementes germinadas, foi analisado o modelo de dispersão e dinâmica da vegetação M_1 [26]. Neste estudo representou-se a região de influência de uma árvore adulta no crescimento das sementes, nas árvores jovens mais próximas e a probabilidade de uma semente cair em qualquer ponto ao redor de uma árvore, como pode ser visto em [26]. Assumiu-se a hipótese de que a cada ano cada árvore adulta produz um número fixo de sementes. As sementes são distribuídas de acordo com uma probabilidade p_{ij} que varia de acordo com a distância d_{ij} de uma árvore adulta:

$$p_{ij} = \alpha \exp^{-d_{ij}} \quad (1)$$

No modelo M_1 assume-se que cada árvore adulta produz um número fixo de sementes a cada ano t . As sementes são distribuídas de acordo com uma distribuição de probabilidade que varia de acordo com a distância d_{ij} em relação a uma árvore adulta (Equação 1).

A germinação de sementes e o processo de crescimento dependem do acesso das mesmas à luz solar, uma vez que as copas das árvores adultas numa vizinhança que contém árvores jovens contém uma alta densidade de estrutura de folhas e galhos, a incidência de luz deve variar e influenciar o crescimento das árvores da vizinhança. De fato, para a maioria das espécies arbóreas, o quanto mais próximo uma árvore jovem estiver de uma árvore adulta, menor será sua possibilidade de sobreviver. Em alguns casos, pode ocorrer a morte de algumas árvores por sombreamento. De forma sucinta, a Figura 5 mostra, em forma compartimentalizada, como a dinâmica da vegetação ocorre na floresta.

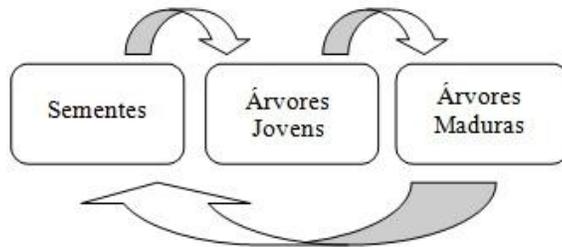


Figura 1: Estágios de Crescimento das Árvores

Por outro lado, a Figura 5 mostra como as transições entre os estágios de crescimento e o modelo de dispersão estão conectados.

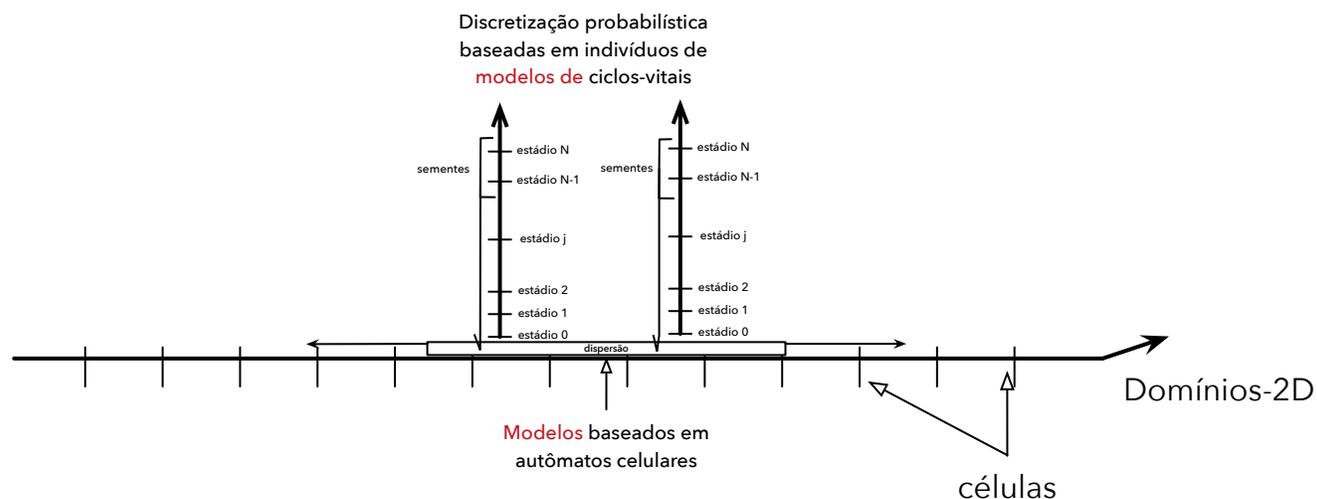


Figura 2: Esquema de acoplamento entre a dinâmica da vegetação e o modelo de dispersão

Na proposta inicial do modelo M_1 apresentada em [26], não foram analisadas a influência do fenômeno de invasão de sementes de distintas espécies arbóreas na dinâmica de germinação e crescimento da vegetação. Tampouco foram representados fatores que influenciam espacialmente o fenômeno de dispersão.

Diante da necessidade de aprimorar os estudos dos principais processos de dispersão espacial de espécies, visando contribuir para o entendimento dos processos naturais, apresentamos neste relatório de pesquisa um estudo que apresenta melhorias e ampliações no modelo M_1 , no sentido de contribuir para o estudo dos modelos matemático-computacionais já desenvolvidos e presentes na literatura. Essa melhoria foi dada através do uso de técnicas de modelagem que amplamente são estudadas e discutidas pelo Professor Sergei Petrovskii e seu grupo de pesquisa em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática na Universidade de Leicester.

Tal parceria foi útil para detalhar o processo de modelagem da dinâmica da vegetação arbórea na aplicação de fenômenos ambientais que representam processos de dispersão temporal e espacial de espécies em áreas alagáveis, no sentido de ajudar a criar parâmetros capazes de mensurar e analisar o comportamento da densidade da população arbórea e da velocidade de dispersão espacial das sementes, bem como os processos de dinâmica de crescimento e, futuramente, invasão de espécies biológicas.

Nesta direção, procurou-se trabalhar com técnicas de modelagem e modelos matemáticos que tratam da dispersão espacial de espécies e/ou invasão de espécies biológicas. Esses conhecimentos foram e ainda serão utilizados para dar continuidade aos estudos de dinâmica de crescimento de populações arbóreas características de áreas alagáveis que foram desenvolvidos durante a pesquisa de doutorado do autor desta proposta.

6 Plano de Trabalho Proposto

No início desta proposta de pesquisa, serão estudadas algumas técnicas de modelagem matemática para dispersão espacial que são usadas pelo grupo de pesquisa em Matemática Aplicada do Prof. Dr. Sergei Petrovskii.

Tais técnicas de modelagem matemática serão aplicadas para a dispersão espacial acopladas a modelos compartimentais para ampliar e aprimorar o modelo de dispersão espacial mencionado. Nesta seção apresenta-se o Plano de Trabalho Proposto.

- **Leitura, revisão e discussão das referências bibliográficas.**

Esta etapa abrange todos os meses do projeto. As referências bibliográficas estão relacionadas à dinâmica de vegetações, dispersão espacial de espécies, invasão biológica e distribuição de probabilidades. As referências serão analisadas e discutidas com o supervisor e alguns membros do grupo de pesquisa.

- **Estudo de Técnicas de Modelagem envolvendo Fenômenos de Dispersão.**

Nesta etapa do estudo ocorrerão a seleção e a implementação de algumas rotinas do modelo computacional focando na análise de técnicas de modelagem considerando o fenômeno de distribuição espacial, baseado no indivíduo, bem como suas aplicações.

- **Estudo de Funções de Distribuição de Cauda Longa.**

Aqui serão analisadas novas funções de probabilidade para densidade que podem ser usadas para modelar fatores externos na dispersão de indivíduos em uma população.

- **Melhorias no modelo de dispersão com a inserção de novas técnicas de modelagem computacional.**

Nesta etapa, algoritmos e *softwares* computacionais serão implementados e discutidos de forma a promover futuras mudanças no modelo de dispersão e melhorias na compreensão de seu comportamento.

- **Melhorias no modelo de dispersão com novas pdfs.**

Concomitantemente às melhorias nos algoritmos, novas funções de distribuição de probabilidade serão implementadas visando representar a dispersão espacial de sementes de uma forma melhorada para promover melhorias no comportamento da modelagem do ciclo de vida das árvores.

- **Redação de textos científicos.**

Esta etapa consiste na redação de manuscritos e relatórios técnicos de pesquisa visando a publicação dos resultados obtidos.

Complementando os passos acima mencionados, ocorrerá a participação de grupos de pesquisa e a apresentação de seminários conforme orientação do Prof Sergei Petrovskii. A Figura 39 mostra o cronograma das atividades propostas.

Mathematical Models of Seeds Dispersal with Application to Species Spread and Biological Invasion

Work Plan and Schedule

Activities Description	Activities of the Research Project																	
	2017/2018																	
	1 Jun	2 Jul	3 Aug	4 Sep	5 Oct	6 Nov	7 Dec	8 Jan	9 Fev	10 Mar	11 Apr	12 Mai	13 Jun	14 Jul	15 Aug	16 Sep	17 Out	18 Nov
1. Reading, review and discussion of the References	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Study of Modeling Techniques for dispersion phenomena		X	X	X	X	X	X	X	X	X								
3. Study of probabilities distribution functions.				X	X	X	X	X	X	X	X	X						
4. Improvements in the dispersion model with insertion of new computational techniques.								X	X	X	X	X	X					
5. Improvements in the dispersion model with new probability distributions.										X	X	X	X	X	X	X	X	
6. Writing scientific papers (articles or abstracts for publication and participation in national or international conferences).												X	X	X	X	X	X	X



 Sergei Petrovskii


 Jaqueline Maria da Silva
 SIAPE 1777175

Figura 3: Plano de Trabalho Proposto

6.1 Plano de Trabalho Executado

Nesta seção apresenta-se de forma sucinta as etapas de execução do Plano de Trabalho. Considerando os objetivos traçados na Seção 4, as seguintes atividades foram desenvolvidas no Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Leicester durante o período de execução do projeto:

6.2 Modelo M_1

Nesta seção serão apresentados algumas simulações com varusando o modelo M_1 para melhor compreender o comportamento da densidade da população arbórea considerando a equação de distribuição exponencial negativa (Equação 1) apresentada na Seção 5 e a Figura 4 que segue:

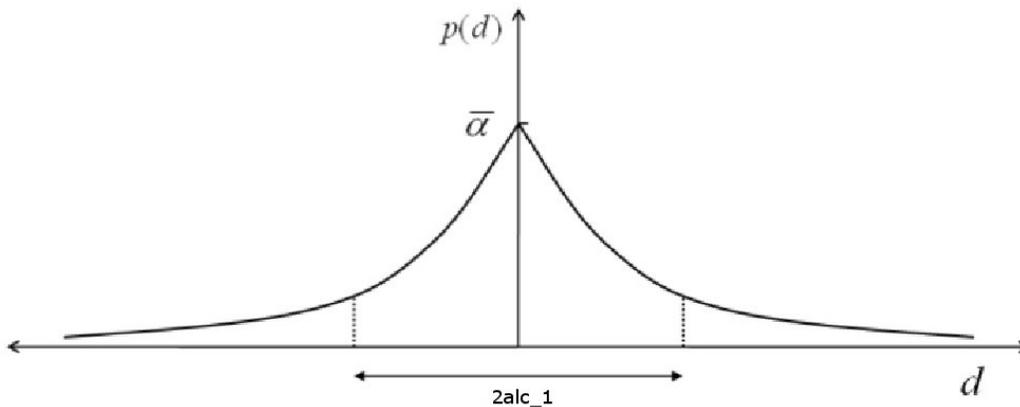
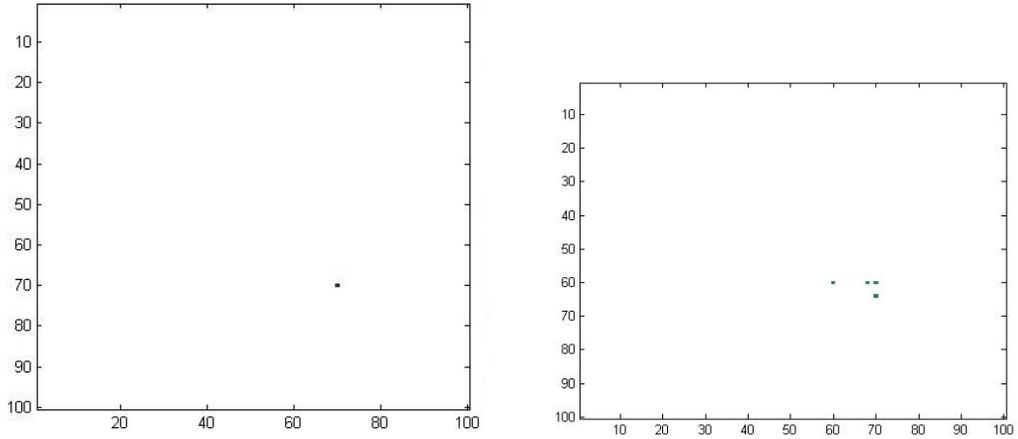


Figura 4: Negative Exponential Distribution

É importante ressaltar que o parâmetro alc_1 mostrado na Figura 4 é o raio da vizinhança Ω_β , onde a dispersão das sementes das árvores adultas ocorrem. $P(d)$ é a função que descreve a probabilidade de dispersão em função da distância d que depende das coordenadas (i, j) . O parâmetro alc_1 está presente em todos os testes executados, analisados e discutidos neste relatório técnico de pesquisa.

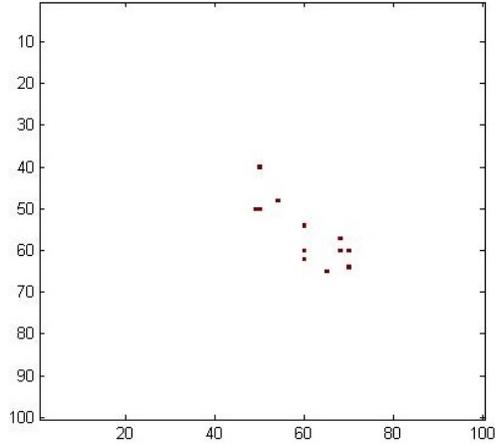
A Figura 5 mostra algumas das condições iniciais do espaço celular C considerando $IC = 01$ árvores adultas (Figura 5-a), $IC = 04$ árvores adultas (Figura 5-b) e $IC = 12$ árvores adultas (Figura 5-c). Essas são as configurações iniciais do espaço celular C que foram usadas durante as simulações e cujos resultados são apresentados e discutidos ao longo deste relatório técnico de pesquisa.

É importante ressaltar que o modelo M_1 apresenta a liberdade de escolher diversas posições iniciais para as árvores adultas e que o posicionamento das árvores apresentado na Figura foi escolhido de forma aleatória.



a) $IC = 1$ árvore adulta.

b) $IC = 4$ árvores adultas.



c) $IC = 12$ árvores adultas.

Figura 5: Condições Iniciais com 1, 4 e 12 árvores adultas distribuídas no espaço celular C .

Seja Ω_θ a vizinhança de *Moore* de uma árvore jovem. Assumimos que a mortalidade μ_{ys} das árvores jovens por sufocamento associada ao sombreamento como sendo:

$$\mu_{ys} = \mu_n + k \left(\frac{q_m}{(2alc_2 + 1)^2} \right), \quad (2)$$

onde μ_n é a mortalidade por fatores naturais, q_m é a quantidade de árvores adultas na vizinhança alc_2 que representa a região de sombreamento da árvore adulta, e $k \in \mathbb{R}^+$. No modelo M_1 a influência da luz será representada como probabilidade da mortalidade.

Assim, para uma vizinhança fixa Ω_θ verifica-se quantas árvores adultas q_m existe em Ω_θ . Depois disso, calcula-se a probabilidade da árvore jovem se tornar uma árvore adulta.

É importante considerar este fenômeno e, futuramente fazer testes com a variação destes parâmetros pois a incidência de luz solar está diretamente associada ao crescimento das árvores assim como, na variação da densidade da população arbórea. Ou seja, é um fenômeno que associa o comportamento espacial e temporal da população.

6.3 Simulações

A Figura 6 mostra resultados sobre o comportamento do parâmetro alc_1 com 30, 60 e 100 simulações quando alc_1 assume $alc_1 = 5$ e $alc_1 = 30$. Os testes foram feitos com tais simulações (30, 60 e 100 simulações) visando investigar se o aumento das mesmas provocaria oscilações no valor da densidade da população de árvores adultas.

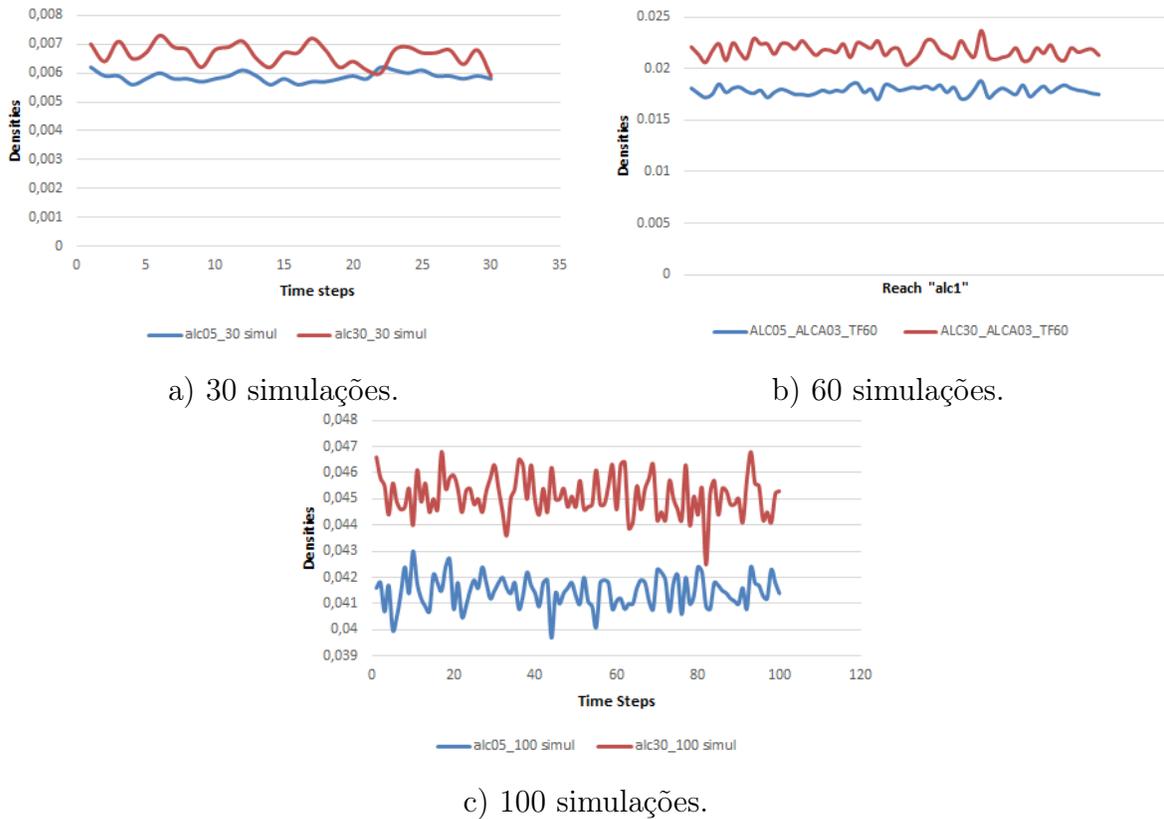


Figura 6: Comportamento da Densidade Populacional

É possível observar nos três itens da Figura 6 acima (item a, b e c) que a distância entre os valores máximo e mínimo da densidade u da população de árvores adultas aumenta suavemente ao longo do tempo t . Este aumento também pode ser observado nas Tabela 1, Tabela 2 e Tabela 3 a seguir.

Além das tabelas citadas, a Figura 7 também mostra a densidade média \bar{u} e os valores máximo e mínimo da densidade da população arbórea considerando 30, 60 e 100 simulações.

Tabela 1: 30 simulações

alc	u_{max}	u_{min}	\bar{u}_{30}
4	0,0061	0,0054	0,0057
5	0,0063	0,0054	0,0059
6	0,0065	0,0057	0,0060
7	0,007	0,0058	0,0063
8	0,007	0,0061	0,0065
9	0,0076	0,0058	0,0067
10	0,0072	0,0061	0,0066

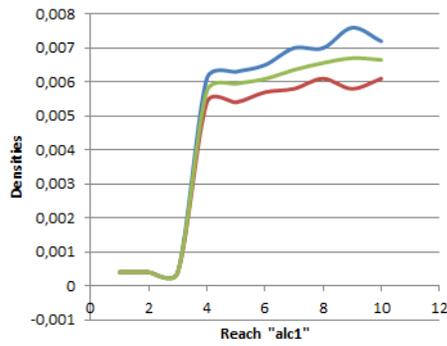
Tabela 2: 60 simulações

alc	u_{max}	u_{min}	\bar{u}_{60}
4	0,0177	0,0154	0,0166
5	0,0188	0,017	0,0178
6	0,0206	0,0176	0,0194
7	0,0218	0,019	0,0202
8	0,0231	0,0202	0,0213
9	0,0229	0,0205	0,0216
10	0,0234	0,0204	0,0217

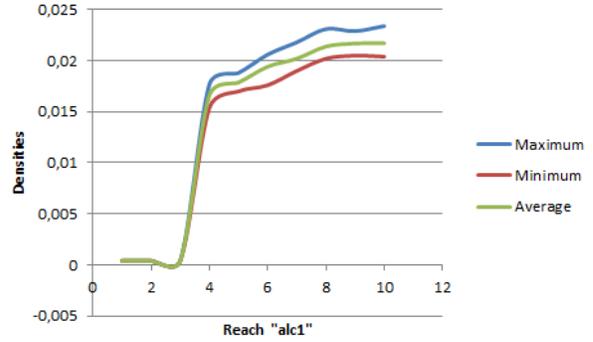
Tabela 3: 100 simulações

alc	u_{max}	u_{min}	\bar{u}_{100}
4	0,041	0,0375	0,0394
5	0,0432	0,04	0,041
6	0,0458	0,042	0,043
7	0,046	0,0425	0,044
8	0,0454	0,0439	0,04474
9	0,0465	0,0436	0,0449
10	0,0466	0,0446	0,04554

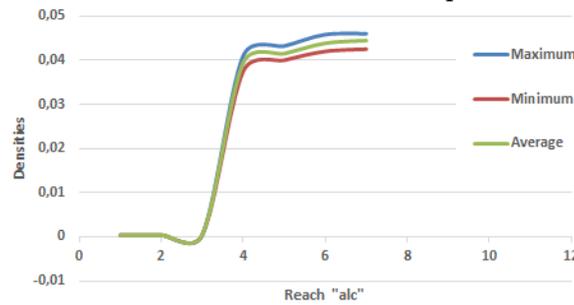
É possível observar na Figura 7-a) que a densidade média \bar{u}_{30} da população permanece entre 0,006 e 0,008 com 30 simulações. Na Figura 7-b) a densidade média \bar{u}_{60} da população permanece entre 0,02 e 0,025 com 60 simulações e na Figura 7-c) a densidade média \bar{u}_{100} da população permanece entre 0,04 e 0,05 com 100 simulações, o que significa que, ao longo do tempo t , como já era esperado, a densidade média \bar{u} da população arbórea aumenta e estabiliza.



a) 30 simulações usando os dados apresentados na Tabela 1.



b) 60 simulações usando os dados apresentados na Tabela 2.



c) simulações usando os dados apresentados na Tabela 3.

Figura 7: Comportamento da Densidade Populacional

A Tabela 4 a seguir mostra uma comparação entre todos os resultados relacionados com a densidade média \bar{u} produzidos com 30, 60 e 100 simulações. É possível observar que:

- Comparando os resultados das colunas \bar{u}_{30}^{30} , \bar{u}_{30}^{60} e \bar{u}_{30}^{100} pode-se observar que são bastante próximos.
- Comparando os resultados das colunas \bar{u}_{60}^{60} e \bar{u}_{60}^{100} pode-se observar que são bastante próximos.
- A densidade u da população aumenta quando o tempo aumenta até alcançar um estado de equilíbrio.

As Tabelas 5, 6, 7 e a Figura 8 abaixo mostram os valores máximo, os valores mínimo e a densidade média \bar{u} quando alc_1 assume valores maiores que 10.

Tabela 4: Comparação entre as Simulações

30 time steps		60 time steps		100 time 82 steps		
alc	\bar{u}_{30}^{30}	\bar{u}_{30}^{60}	\bar{u}_{60}^{60}	\bar{u}_{30}^{100}	\bar{u}_{60}^{100}	\bar{u}_{100}^{100}
4	0,0057	0,0057	0,0166	0,0058	0,0166	0,03942
5	0,0059	0,0059	0,0178	0,0058	0,0178	0,0414
6	0,0060	0,0061	0,0194	0,0061	0,0194	0,0438
7	0,0063	0,0062	0,0202	0,0063	0,0202	0,0444
8	0,0065	0,0066	0,0213	0,00665	0,0213	0,04474
9	0,0067	0,0066	0,0216	0,0065	0,0216	0,0449
10	0,0066	0,0067	0,0217	0,00669	0,0217	0,04554

Tabela 5: 30 simulações

alc_1	u_{min}	u_{max}	\bar{u}
11	0.006	0.0075	0.0066
13	0.0061	0.0073	0.0066
30	0.0059	0.0073	0.0066
50	0.0059	0.0073	0.0066
100	0.0059	0.0073	0.0066

Tabela 6: 60 simulações

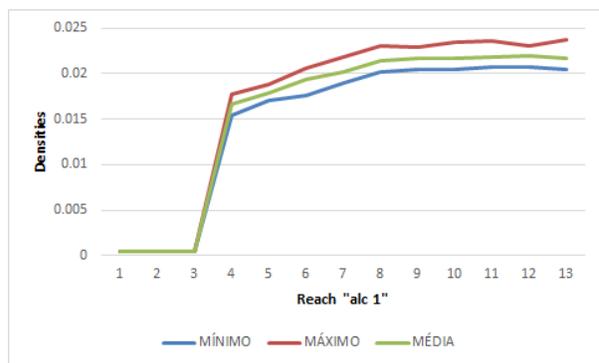
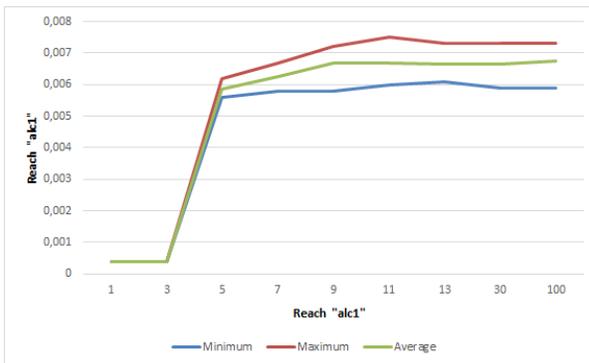
alc_1	u_{min}	u_{max}	\bar{u}
11	0,0207	0,0236	0.0217
13	0,0207	0,0231	0.0219
30	0,0204	0,0237	0.0217
50	0,0204	0,0237	0.0217
100	0,0204	0,0237	0.0217

Tabela 7: 100 simulações

alc_1	u_{min}	u_{max}	\bar{u}
11	0.0435	0.0471	0.0450
13	0.0435	0.0468	0.0450
30	0.0425	0.0468	0.0451
50	0.043	0.0465	0.0449
100	0,0427	0,0466	0,04554

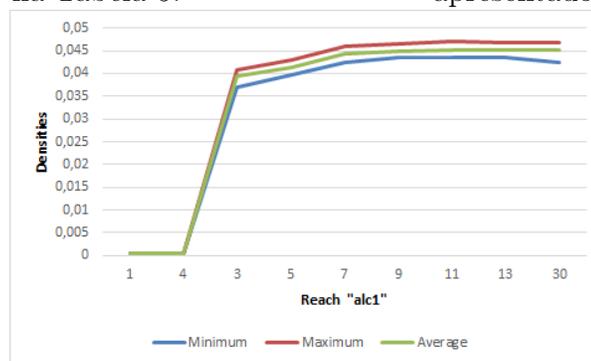
Observa-se também que estado de equilíbrio é alcançado mais rapidamente quando aumenta-se o valor do parâmetro alc_1 . Ao observar as Tabela 5, Tabela 6 e Tabela 7, verifica-se que ao usarmos distâncias maiores na função de probabilidade, ou seja, ao aumentarmos alc_1 além do valor 11, a dinâmica da vegetação ocorre de forma rápida, permitindo que a população ocupe rapidamente o espaço celular C , alcançando assim a sua capacidade suporte de árvores adultas e, por consequência, o estado de equilíbrio do sistema.

Os itens a, b e c da Figura 8 corroboram esta conclusão, uma vez que mostram a densidade média \bar{u} estabilizando próximo de $\bar{u} = 0,007$ para 30 simulações (item a); próximo de $\bar{u} = 0,02$ para 60 simulações (item b) e próximo de $\bar{u} = 0,045$ para 100 simulações (item c).



a) 30 simulações com os mesmos dados apresentados na Tabela 5.

b) 60 simulações com os mesmos dados apresentados na Tabela 6.



c) 100 simulações com os mesmos dados apresentados na Tabela 7.

Figura 8: Comportamento da Densidade

A Figura 9 mostra a relação entre os diferentes valores de alc_1 quando comparados com os valores das densidades u da população obtidos ao longo do tempo t . A Figura 10 mostra os mesmos resultados que a Figura 9, porém com $alc_1 = 4$, $alc_1 = 7$ e $alc_1 = 50$ e é fácil observar que ocorre a relação $alc_1^4 < alc_1^7 < alc_1^{50}$ para todos os valores de alc_1 .

Como os valores de alc_1 variam, é possível observar que a densidade \bar{u} média da população de árvores adultas também aumenta. Observa-se também que, o longo do tempo, o aumento nos valores de alc_1 não faz mais sentido pois o espaço celular C já está saturado de árvores. Os dados usados para produzir as Figuras 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 estão apresentados na Tabela 8.

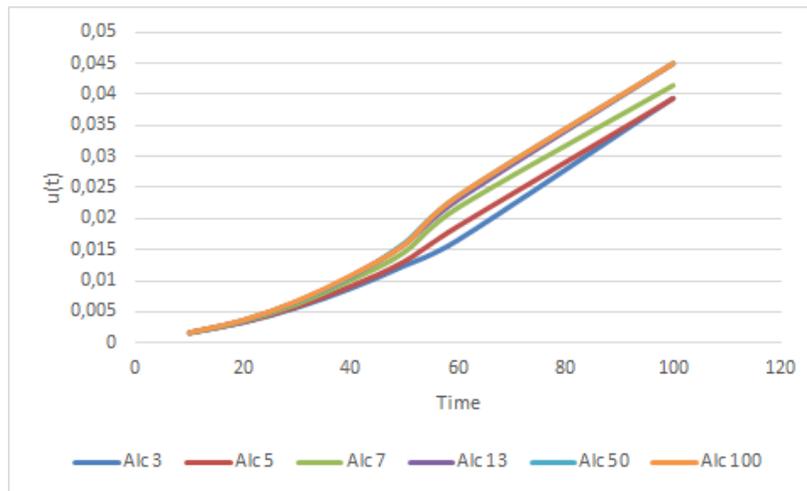


Figura 9: Comportamento de alc_1 ao longo do tempo.

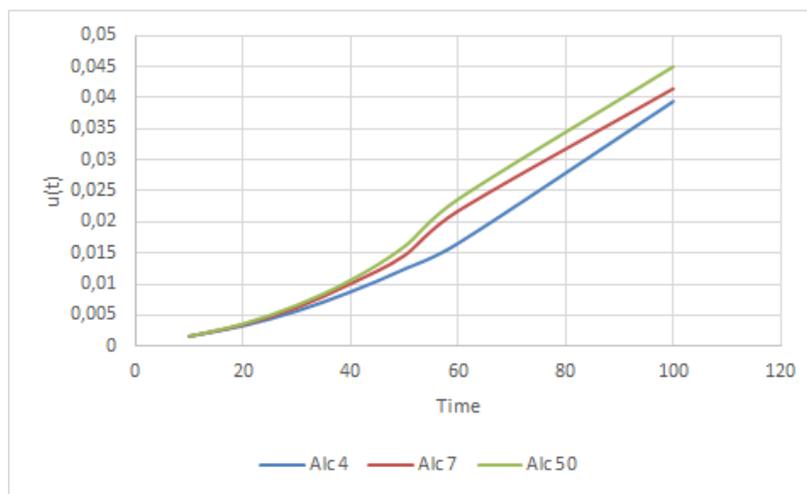


Figura 10: $alc_1 = 4, 7, 50$.

As Figuras 11 e 12 mostram a densidade \bar{u} média da dinâmica da vegetação alcançando o estado de equilíbrio para $t > 200$. Em situações similares, foram usadas 10 simulações para avaliar o comportamento da densidade média \bar{u} ao longo de t .

É possível observar que a densidade média \bar{u} considerando $alc_1 = 4$ e $alc_1 = 5$ na Figura 11 apresenta um ponto de interseção quando $120 < t < 150$. Isso já era esperado pois, como o modelo é probabilístico, podem ocorrer algumas pequenas flutuações nos resultados obtidos.

Outro exemplo dessas flutuações pode ser observado na Figura 12 em $100 < t < 150$ ao compararmos $alc_1 = 5$ e $alc_1 = 7$, o que significa que quando os valores de alc_1 aumentam, ocorrem menos flutuações ao longo do tempo. É importante ressaltar que as flutuações não são grandes, uma vez que a diferença entre $\bar{u} = 0,05$ e $\bar{u} = 0,04$ é apenas 0,01.

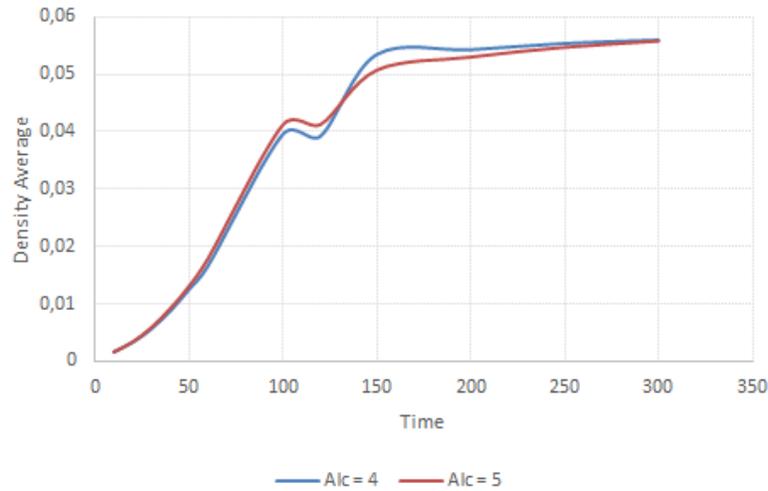


Figura 11: $alc_1 = 4$ e $alc_1 = 5$ com $t = 300$.

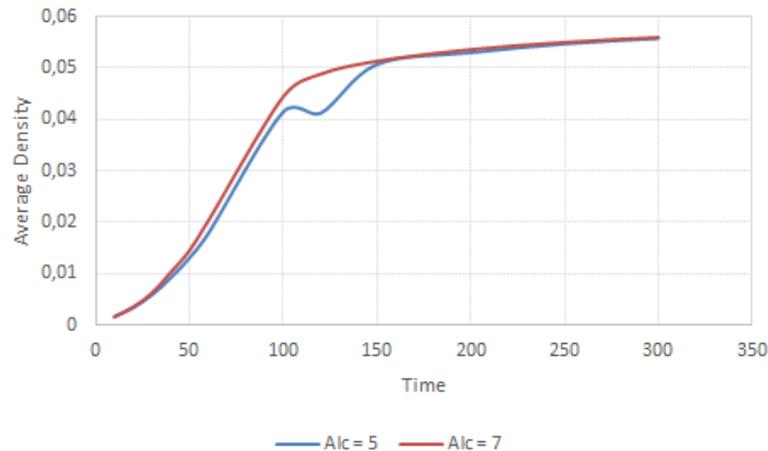


Figura 12: $alc_1 = 5$ e $alc_1 = 7$ com $t = 300$.

Pode-se observar com mais precisão nas Figura 13, Figura 14 e Figura 15 que o modelo não apresenta grandes flutuações quando os valores de alc_1 aumentam significativamente.

Na Tabela 8 é possível observar que, considerando $t = 360$, a quantidade de árvores adultas no espaço celular C é sempre 562. Este fenômeno também acontece quando:

- $t = 342$ com $alc_1 = 4$;
- $t = 355$ com $alc_1 = 5$;
- $t = 360$ com $alc_1 = 7$;
- $t = 346$ com $alc_1 = 9$;
- $t = 355$ com $alc_1 = 11$;
- $t = 360$ com $alc_1 = 13$;
- $t = 338$ com $alc_1 = 30$;
- $t = 338$ com $alc_1 = 50$;
- $t = 338$ com $alc_1 = 100$;

Isso acontece porque a dinâmica da vegetação já alcançou seu estado de equilíbrio, assim como sua capacidade suporte de árvores adultas no espaço celular C .

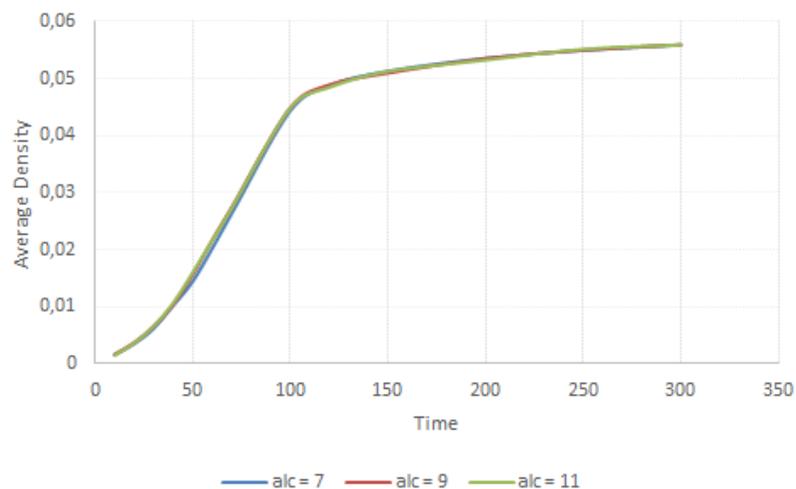


Figura 13: $alc_1 = 7$, $alc_1 = 9$ e $alc_1 = 11$ com $t = 300$.

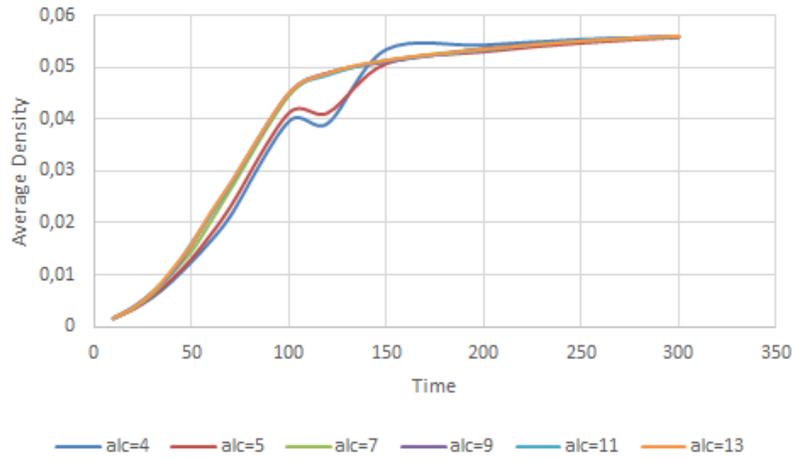


Figura 14: $alc_1 = 4$, $alc_1 = 5$, $alc_1 = 7$, $alc_1 = 9$, $alc_1 = 11$ e $alc_1 = 13$ com $t = 300$.

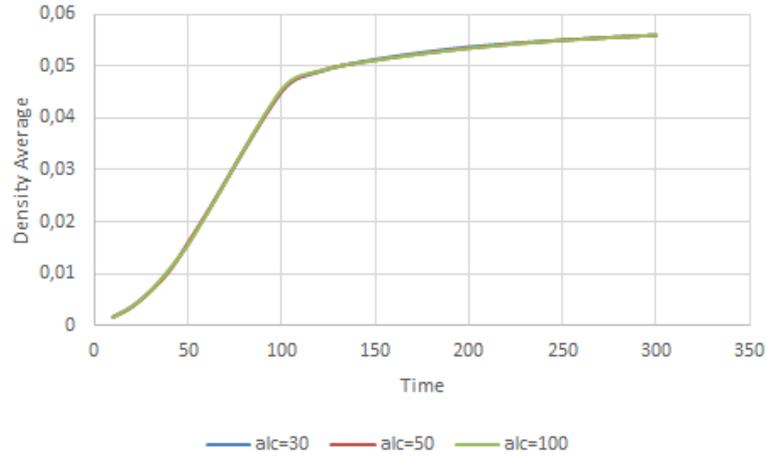


Figura 15: $alc_1 = 30$, $alc_1 = 50$ and $alc_1 = 100$ com $t = 300$.

Tabela 8: Densidade Média

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 5$	$alc_1 = 7$	$alc_1 = 9$	$alc_1 = 11$	$alc_1 = 13$	$alc_1 = 30$	$alc_1 = 50$	$alc_1 = 100$
10	0,0017	0,0016	0,0016	0,0017	0,0016	0,0017	0,0017	0,0016	0,0017
20	0,0034	0,0034	0,0035	0,0037	0,0037	0,0036	0,0037	0,0036	0,0037
30	0,0057	0,0059	0,0063	0,0066	0,0067	0,0066	0,0067	0,0067	0,0067
40	0,0088	0,0092	0,0103	0,0105	0,0107	0,0109	0,0108	0,0105	0,0108
50	0,0125	0,0130	0,0105	0,0157	0,0161	0,0159	0,0157	0,0161	0,0157
60	0,0166	0,0178	0,0203	0,0218	0,0217	0,0220	0,0217	0,0217	0,0216
70	0,0214	0,0232	0,0264	0,0275	0,0274	0,0276	0,0277	0,0279	0,0279
100	0,0396	0,0419	0,0445	0,0449	0,0449	0,0449	0,0452	0,0452	0,0456
120	0,0392	0,0413	0,0488	0,0489	0,0486	0,0488	0,0489	0,0490	0,0496
150	0,0534	0,0507	0,0514	0,0510	0,0513	0,0513	0,0513	0,0512	0,0512
200	0,0543	0,0529	0,0536	0,0535	0,0533	0,0535	0,0537	0,0535	0,0535
250	0,0554	0,0547	0,055	0,0550	0,0552	0,0551	0,0550	0,0550	0,0549
300	0,0559	0,0557	0,0559	0,0559	0,0559	0,0560	0,0559	0,0559	0,0559

A Figura 16 foi produzida com os resultados apresentados nas Tabela 9 e Tabela 10 focando na dinâmica da vegetação ocorrida durante $10 \leq t \leq 20$. Não há informações a respeito da dinâmica da vegetação para $t \geq 10$ porque, no modelo M_1 , como uma das hipóteses principais, assume-se que uma semente leva 10 anos para se transformar em uma árvore jovem e esta árvore jovem leva um ano para se transformar em árvore adulta e ser capaz de produzir sementes.

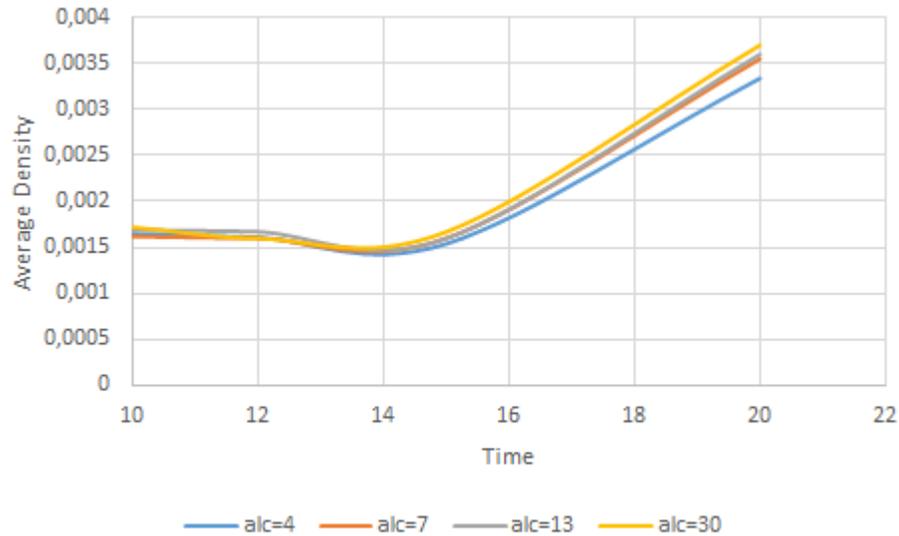


Figura 16: Comportamento de alc_1 para $10 \leq t \leq 20$.

Tabela 9: Comportamento da Densidade de Árvores Adultas com $10 \leq t \leq 20$

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 7$	$alc_1 = 13$	$alc_1 = 30$
10	0,00165	0,00162	0,00169	0,00172
12	0,00161	0,0016	0,00167	0,0016
15	0,00154	0,0016	0,0016	0,00167
20	0,00334	0,00355	0,0036	0,0037

Tabela 10: População média para $10 \leq t \leq 20$

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 7$	$alc_1 = 13$	$alc_1 = 30$
10	16,5	16,2	16,9	17,2
12	16,1	16	16,7	16
15	15,4	16	16	16,7
20	33,4	35,5	36	37

A Figura 17 foi produzida com os resultados apresentados nas Tabela 11 e Tabela 12. A figura mostra o comportamento da dinâmica da vegetação considerando os valores $alc_1 = 4$ e $alc_1 = 13$ para $100 \leq t \leq 150$ (Figura 17-a) e $100 \leq t \leq 300$ (Figura 17-b). Observa-se que quando o tempo t aumenta, os valores de alc_1 também aumentam. Ao longo do tempo t , a dinâmica da vegetação novamente alcança o estado de equilíbrio.

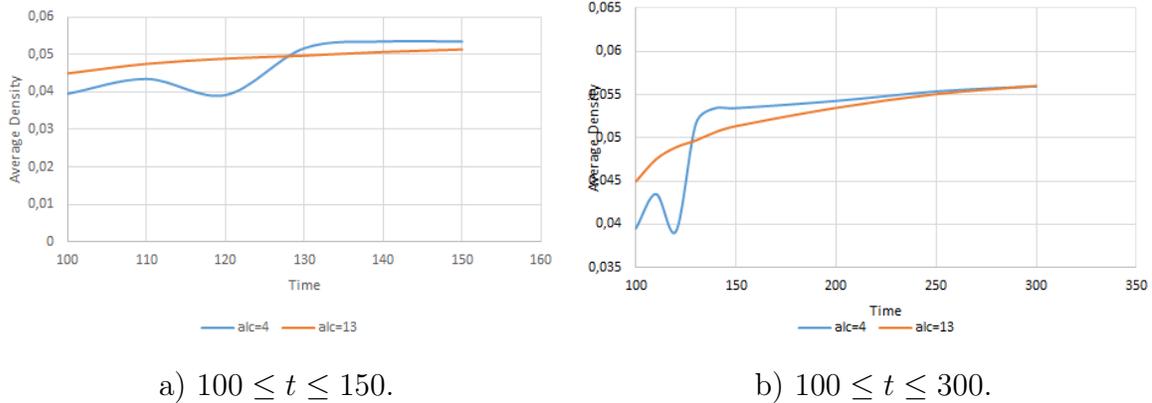


Figura 17: Comportamento de alc_1

Tabela 11: Comportamento da Densidade de Árvores Adultas com $100 \leq t \leq 150$

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 13$
100	0,03956	0,04497
110	0,0435	0,04752
120	0,0392	0,04891
130	0,0517	0,04971
140	0,05346	0,05069
150	0,05344	0,05136

Tabela 12: População de árvores adultas considerando $100 \leq t \leq 150$

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 13$
100	395,6	449,7
110	435	475,2
120	392	489,1
130	517	497,1
140	534,6	506,9
150	534,4	513,6

Nas Figura 17-a) e Figura 17-b) é possível até observar que a convergência para o estado de equilíbrio começa a acontecer a partir de $t = 130$ e que se estabiliza após $t = 200$. A Tabela 11 mostra que a densidade u da população apresenta menos oscilações quando $alc_1 = 13$ se comparado com um alcance menor, tal com $alc_1 = 4$. A Tabela 12

confirma esta afirmação mostrando a média de árvores adultas considerando o intervalo de tempo analisado.

Desta forma, o parâmetro alc_1 mostra que ao aumentar a distância entre uma árvore adulta e a posição onde há probabilidade de cair sementes, a dinâmica da vegetação ocorre de forma mais suave e a capacidade suporte, assim como o estado de equilíbrio são alcançados mais rapidamente.

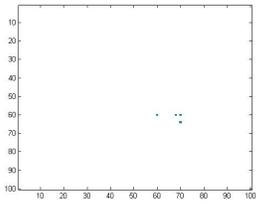
O aumento de alc_1 pode ser interpretado ecologicamente como árvores com copas extensas que tem um raio de sombreamento maior em volta do tronco, e, conseqüentemente, permitem que a dispersão ocorra em regiões mais distantes. Outra forma de interpretar o aumento do valor deste parâmetro seria através da inserção de variáveis externas à dinâmica mas que influenciam a mesma diretamente, tais como a presença de pássaros, que agem como agentes dispersores de sementes. O vento, e por conseqüência, estudos envolvendo a velocidade do vento, é outro fator que influencia fortemente o aumento de alc_1 e que é outro forte influenciador no processo de dispersão.

Sendo assim, um estudo detalhado do comportamento do modelo M_1 sob a influência do parâmetro alc_1 é interessante e necessário para complementar esta pesquisa.

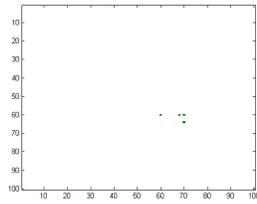
As Figuras 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 e 30 a seguir mostram o comportamento espacial da dinâmica da vegetação considerando diferentes intervalos de tempo. Pode-se observar nas Figuras 18, 19 e 20 que antes do instante $t = 10$ não ocorre nenhuma dinâmica na vegetação. De fato, pelo modelo M_1 , considerando a condição inicial de 4 árvores adultas no espaço celular C , as sementes se espalham e levam 10 anos para se tornarem árvores jovens e mais 1 ano para se tornarem árvores adultas e serem capazes de espalhar sementes.

Da Figura 22 até a Figura 24, o comportamento espacial da dinâmica da vegetação pode ser observado considerando pequenos valores de t a saber $t = 12$ (Figura 22), $t = 15$ (Figura 23) e $t = 20$ (Figura 24).

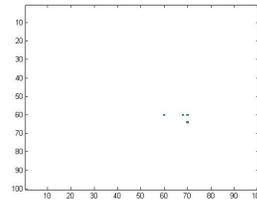
Observa-se que para $t \geq 10$, as árvores adultas começam a se espalhar assumindo formatos de dispersão espacial distintos em função dos diferentes valores de alc_1 utilizados. Somente na segunda geração de árvores adultas, após $t = 20$ é que a dispersão espacial começa a ganhar força pois a quantidade de árvores adultas no espaço celular C capazes de produzir sementes aumenta consideravelmente. Este processo acontece de 10 em 10 anos. Porém, dada a consistência do modelo M_1 e considerando a fluência da dinâmica da vegetação, é um fenômeno que não é facilmente observado espacialmente.



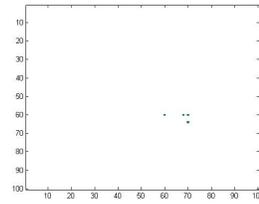
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

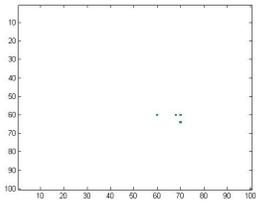


c) $alc_1 = 13.$

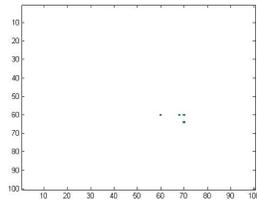


d) $alc_1 = 30.$

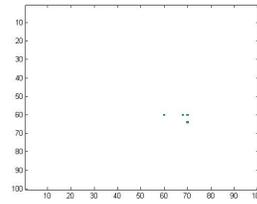
Figura 18: $t = 3$



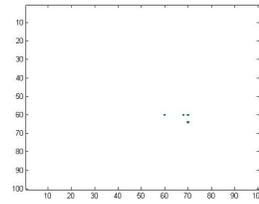
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

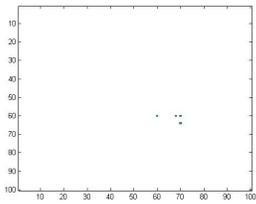


c) $alc_1 = 13.$

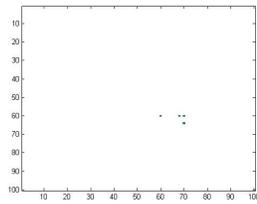


d) $alc_1 = 30.$

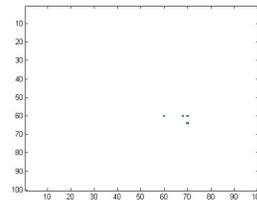
Figura 19: $t = 5$



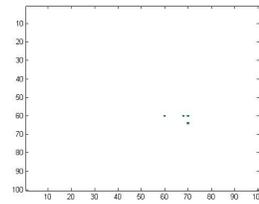
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

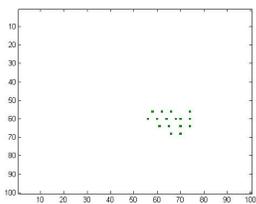


c) $alc_1 = 13.$

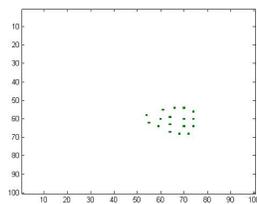


d) $alc_1 = 30.$

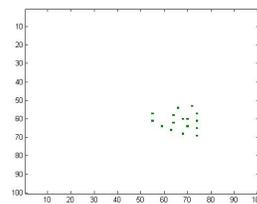
Figura 20: $t = 7$



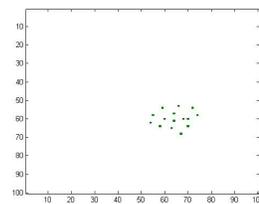
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

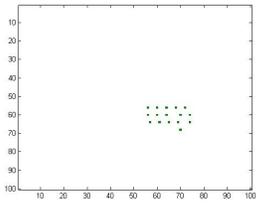


c) $alc_1 = 13.$

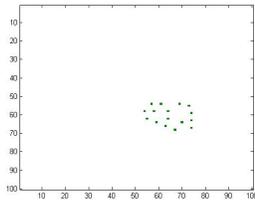


d) $alc_1 = 30.$

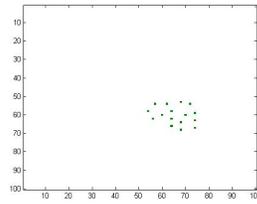
Figura 21: $t = 10$



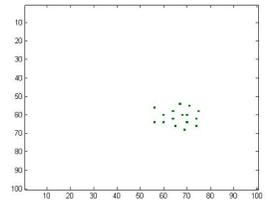
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

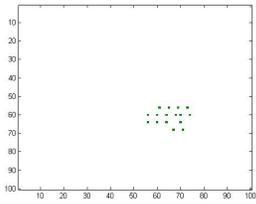


c) $alc_1 = 13.$

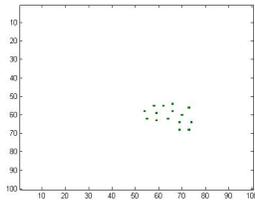


d) $alc_1 = 30.$

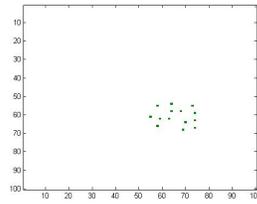
Figura 22: $t = 12$



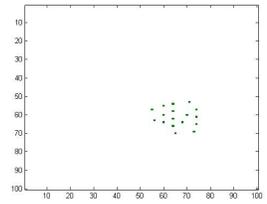
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$

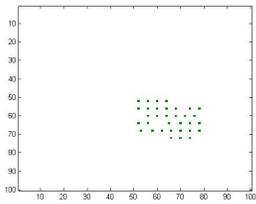


c) $alc_1 = 13.$

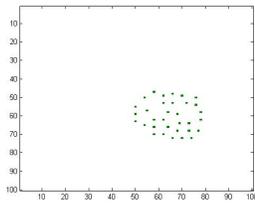


d) $alc_1 = 30.$

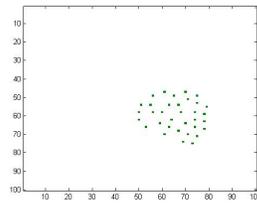
Figura 23: $t = 15$



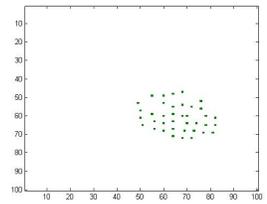
a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 7$



c) $alc_1 = 13.$

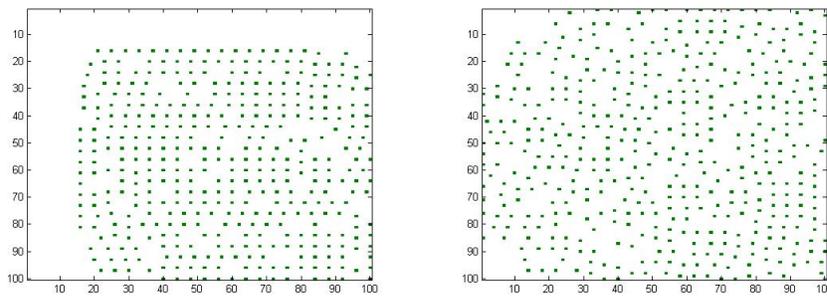


d) $alc_1 = 30.$

Figura 24: $t = 20$

Da Figura 25 até a Figura 30, o comportamento espacial da dinâmica da vegetação pode ser observado considerando valores bem maiores para t . Nestes casos, considerando $100 \leq t \leq 130$ e $alc_1 = 4$ (Figuras 25-a e 28-a, a população quase preenche o espaço celular C).

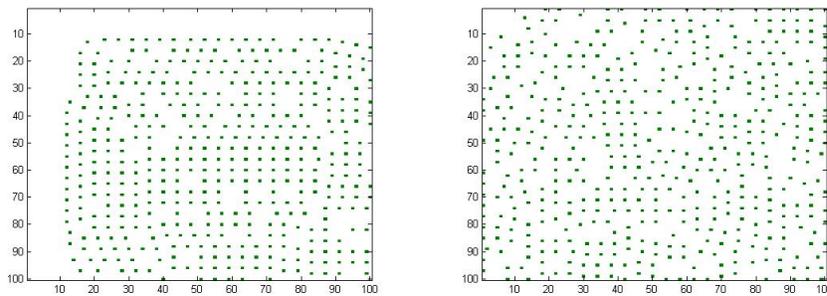
Na Figura 29-a) é possível observar que para $t = 140$ o modelo M_1 alcança o estado de equilíbrio preenchendo o espaço celular C . Por outro lado, considerando $alc_1 = 11$, o modelo já alcança o estado de equilíbrio preenchendo o espaço celular C bem antes, ou seja, com $t = 120$ (Figura 27-b), o que não acontece se considerarmos o mesmo instante $t = 120$, porém com $alc_1 = 4$ (Figura 27-a).



a) $alc_1 = 4$

b) $alc_1 = 13$.

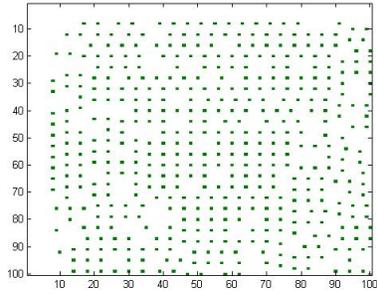
Figura 25: $t = 100$



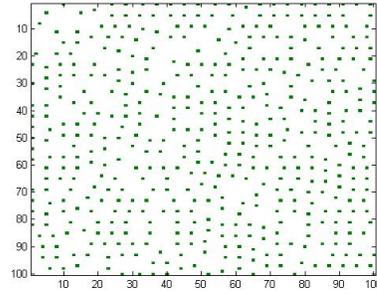
a) $alc_1 = 4$

b) $alc_1 = 13$.

Figura 26: $t = 110$

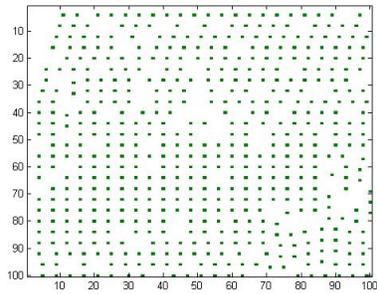


a) $alc_1 = 4$

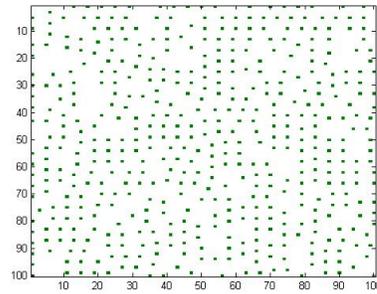


b) $alc_1 = 13.$

Figura 27: $t = 120$

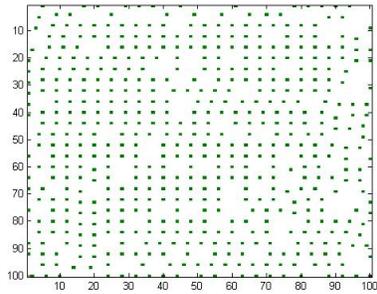


a) $alc_1 = 4$

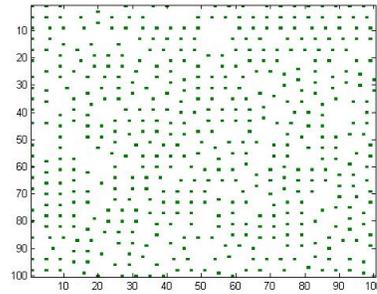


b) $alc_1 = 13.$

Figura 28: $t = 130$

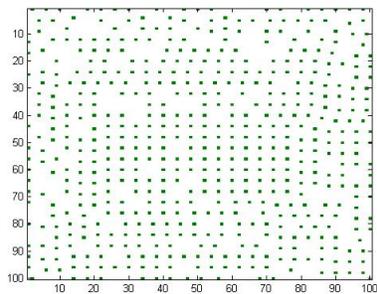


a) $alc_1 = 4$

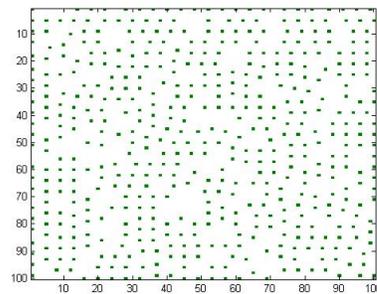


b) $alc_1 = 13.$

Figura 29: $t = 140$



a) $alc_1 = 4$



b) $alc_1 = 13.$

Figura 30: $t = 150$

6.4 Estudos sobre a Mortalidade

O modelo tem duas situações que representam a mortalidade das árvores. A cada ano, o modelo contabiliza a mortalidade das árvores adultas no espaço celular C e 10% das árvores adultas morrem por fenômenos naturais, ou seja, fenômenos que não estão vinculados à ação do homem. O comportamento da dinâmica da vegetação simulada pelo modelo M_1 considerando a influência da mortalidade natural será discutido nas subseções 6.4.1 and 6.4.2 a seguir.

A segunda situação que tem a mortalidade representada no modelo M_1 é representada pela Equação 2, na Seção 6.2. Como μ_n e k são apenas parâmetros na Equação 2, é possível variar seus valores no modelo. Discutiremos o comportamento do modelo sobre a influência desta equação em trabalhos futuros.

6.4.1 Mortalidade em 3%

A Figura 31 a seguir mostra o comportamento da mortalidade das árvores adultas por fatores naturais na dinâmica da vegetação e sua influência no modelo M_1 considerando o intervalo $10 \leq t \leq 900$.

Observa-se que com uma taxa de mortalidade baixa de apenas 3% de árvores adultas, a dinâmica apresenta curvas de comportamento similares, independente se $alc_1 = 4$, $alc_1 = 5$ ou $alc_1 = 7$. Ou seja, valores relativamente pequenos de alc_1 , dada a mortalidade fixada em 3% não provocam grandes flutuações na densidade média de árvores adultas da população.

Além disso, observa-se também que, para $t \geq 600$ ocorre estabilização na densidade média de árvores adultas, ou seja, a dinâmica da vegetação alcança sua capacidade suporte e o equilíbrio.

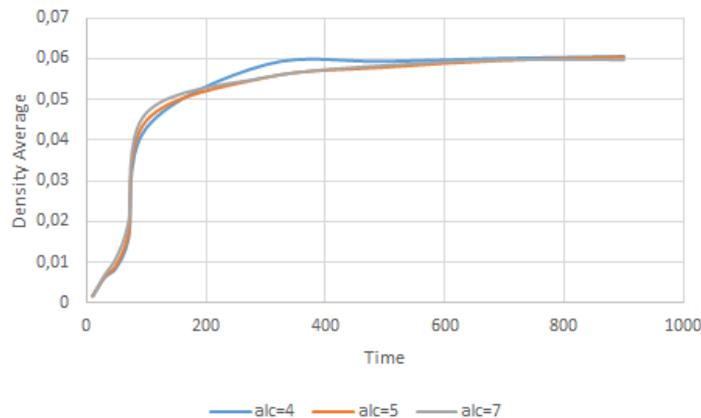


Figura 31: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 900$.

Numa tentativa de melhor investigar o que acontece na Figura 31, fizemos uma ampliação no comportamento das curvas e consideramos o intervalo de tempo $10 \leq t \leq 300$. A Figura 32 mostra esta ampliação.

Observa-se que para $t \leq 100$ a dinâmica da vegetação apresenta uma pequena oscilação na densidade média na população das árvores adultas. Este fato ocorre porque a quantidade de árvores adultas na população neste período ainda é pequena e a mortalidade natural de 3% não influencia fortemente a dinâmica da vegetação, permitindo assim, que a dinâmica ocorra sem outras oscilações.

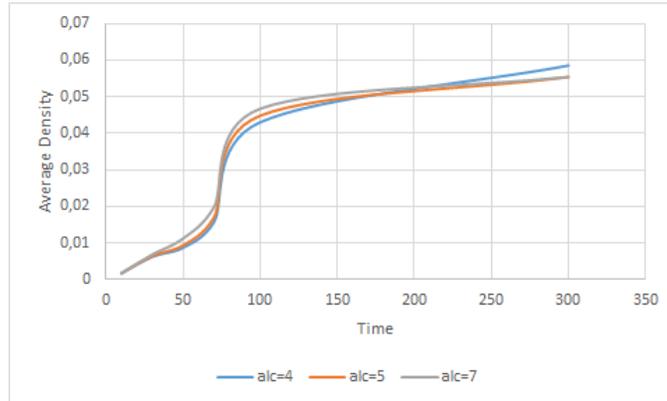


Figura 32: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 300$.

Novamente ampliamos a Figura 31 para discutirmos o que ocorre com a dinâmica da vegetação no intervalo $10 \leq t \leq 120$. A Figura 33 mostra o resultado desta ampliação.

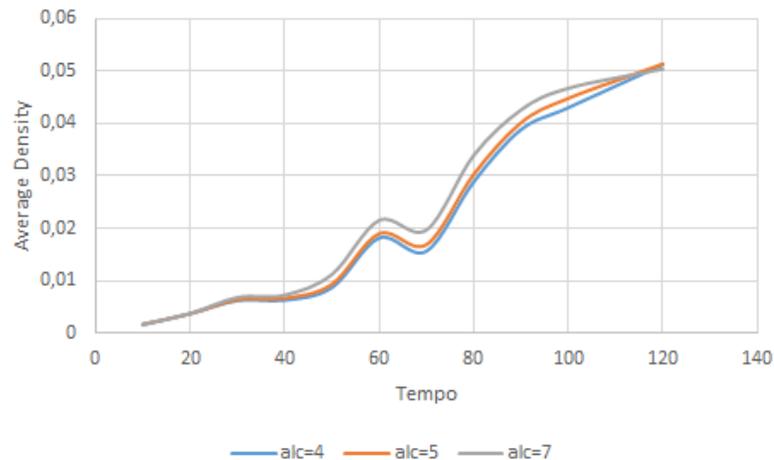


Figura 33: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 120$.

Conforme mencionado anteriormente, o fenômeno de inserção de árvores adultas na dinâmica da vegetação a cada 10 anos é difícil de observar espacialmente, o que não ocorre ao fazermos uma investigação temporal. Os parâmetros de mortalidade por fatores naturais, alc_1 e a capacidade de produção de sementes foram mantidos.

De fato, a Figura 33 mostra que antes de 10 anos não houve nenhuma variação na densidade de árvores adultas. Porém para os valores de t iguais a 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100, os aumentos nas densidades é bastante perceptível embora as diferenças entre as densidades calculadas estejam bem próximas zero.

Esta análise corrobora a afirmação de que a taxa de mortalidade natural em 3% não influencia negativamente a dinâmica da vegetação. Esta informação é interessante pois se a mortalidade por fatores externos for inserida juntamente com a mortalidade por fatores naturais e ambas se mantiverem abaixo de 3%, a exploração das árvores adultas para fins econômicos não prejudica a dinâmica da vegetação.

Alguns dos resultados usados para produzir as Figura 31, Figura 32 e Figura 33 acima apresentadas e mencionadas estão apresentados na Tabela 13. Ressalta-se que a Tabela 13 está incompleta porque alguns testes ainda são necessários para completar esta pesquisa.

Tabela 13: Densidade Média de Árvores Adultas

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 5$	$alc_1 = 7$	$alc_1 = 9$	$alc_1 = 11$	$alc_1 = 13$	$alc_1 = 30$	$alc_1 = 50$	$alc_1 = 100$
10	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0017	0,0017
20	0,0037	0,0037	0,0037	0,0039	0,0039	0,0041	0,0041	0,0040	0,0040
30	0,0062	0,0064	0,0068	0,0071	0,0072	0,0071	0,0070	0,0071	0,0072
40	0,0063	0,0067	0,0072	0,0110	0,0114	0,0116	0,0116	0,0116	0,0116
50	0,0087	0,0093	0,0112	0,0112	0,0117	0,0116	0,0170	0,0168	0,0170
60	0,0181	0,0190	0,0215	0,0231	0,0233	0,0236	0,0235	0,0233	0,0241
70	0,0156	0,0169	0,0197	0,0200	0,0201	0,0203	0,0294	0,0294	0,0295
100	0,0430	0,0448	0,0467	0,0473	0,0470	0,047	0,0471	0,0473	0,0469
120	0,0512	0,0513	0,0504	0,0500	0,0504	0,0506			
150	0,0577	0,0526	0,0520	0,0521	0,0516	0,0519			
200	0,0580	0,0536	0,0536	0,0531	0,0536				
250	0,0580	0,0548	0,0547	0,0544	0,0548				
300	0,0585	0,0553	0,0554	0,0555	0,0557	0,0555			
500	0,0593	0,0579	0,0583	0,0584	0,0583	0,0586			
700	0,0601	0,0596	0,0597	0,0599	0,0598				
900	0,0605	0,0604	0,0597						

6.4.2 Mortalidade de 70%

Esta seção apresenta alguns resultados do comportamento do modelo M_1 considerando uma mortalidade por fatores naturais de 70% para as árvores adultas.

A Figura 34 mostra o comportamento da dinâmica da vegetação no intervalo $10 \leq t \leq 900$, a Figura 35 mostra uma ampliação no intervalo $10 \leq t \leq 300$ e a Figura 36 mostra uma ampliação em $10 \leq t \leq 120$ para melhor visualizar o comportamento da dinâmica da vegetação.

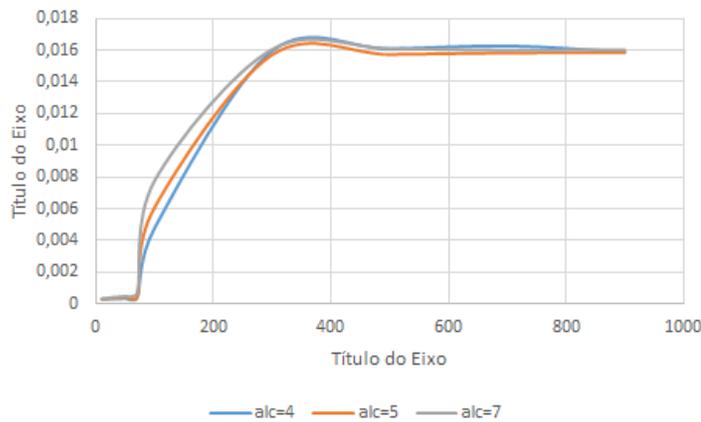


Figura 34: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 900$.

Observa-se nas Figura 34 e Figura 35 que para $t \leq 80$ praticamente não ocorre aumento na densidade média de árvores adultas na população arbórea, independente se $alc_1 = 4$, $alc_1 = 5$ ou $alc_1 = 7$.

Observa-se também que, pela Figura 34 a dinâmica da vegetação encontra equilíbrio apenas após $t = 500$ e com uma densidade média de árvores adultas extremamente baixa de $\bar{u} = 0,016$.

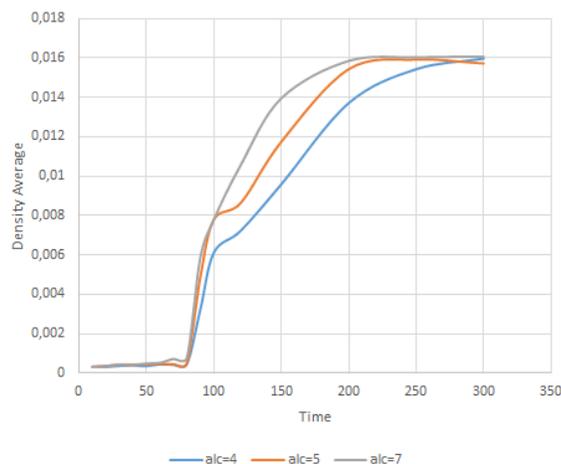


Figura 35: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 300$.

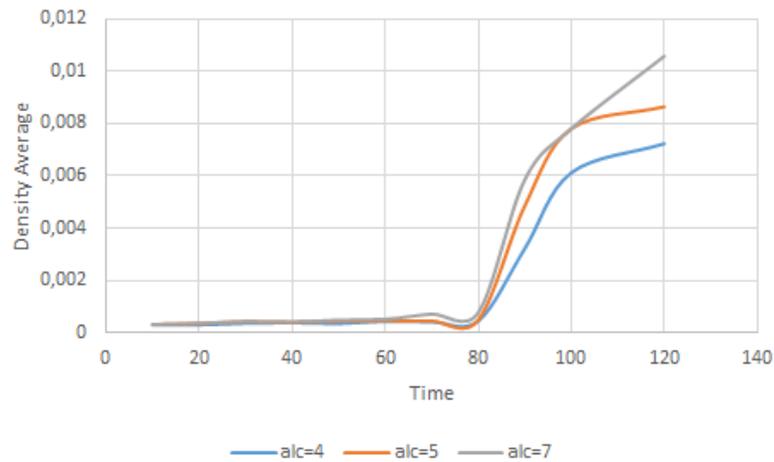


Figura 36: Comportamento da Mortalidade considerando $10 \leq t \leq 120$.

Diferentemente do que aconteceu quando analisamos o comportamento da dinâmica da vegetação sob a influência de uma taxa de mortalidade por fatores naturais de 3%, é possível observar na Figura 36 que, ao aplicar uma taxa de mortalidade por fatores naturais de 70%, a dinâmica da vegetação apresenta dificuldade de se desenvolver antes de $t = 80$ e só depois deste instante, os valores da densidade arbórea da população começam a aumentar.

A Figura 37 mostra o comportamento da dinâmica da vegetação considerando $alc_1 = 4, 5, 7, 9, 11, 13, 30, 50, 100$. Mostra também que o comportamento da dinâmica da vegetação é o mesmo independente dos valores de alc_1 .

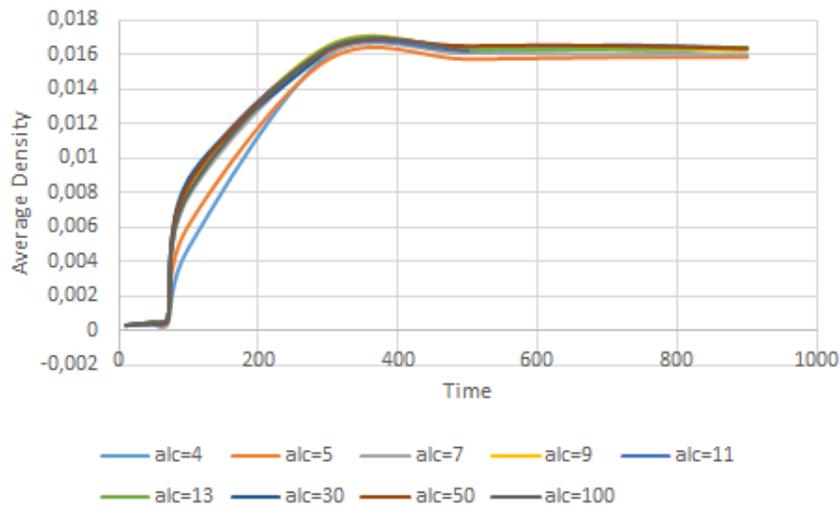


Figura 37: Densidade de Árvores Adultas com $alc_1 = 4, 5, 7, 9, 11, 13, 30, 50, 100$.

A Figura 38 a seguir mostra o comportamento da dinâmica da vegetação considerando uma ampliação feita no intervalo $300 \leq t \leq 900$.

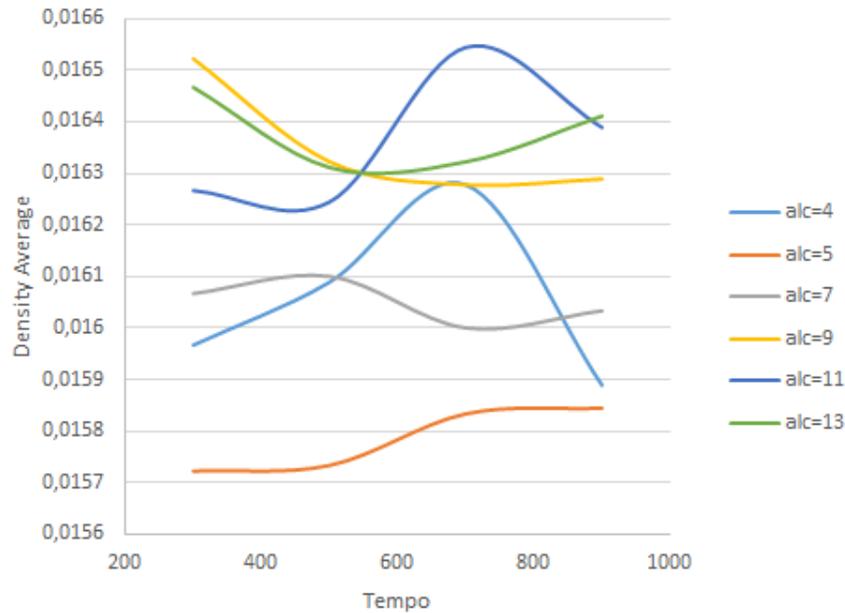


Figura 38: Densidade de Árvores Adultas para $300 \leq t \leq 900$.

Observa-se na Figura 38 que o modelo M_1 , apesar de convergir para o estado de equilíbrio após $t = 500$, apresenta pequenas oscilações nos valores das densidades de árvores adultas. De fato são pequenas pois a diferença entre as densidades é muito próxima de zero.

Os resultados usados para produzir as Figura 34, Figura 35, Figura 36, Figura 37 e Figura 38 são apresentados na Tabela 14. A Tabela 14 está incompleta porque alguns testes ainda são necessários para preenchê-la e incrementar esta pesquisa.

Tabela 14: Densidade Média

t	$alc_1 = 4$	$alc_1 = 5$	$alc_1 = 7$	$alc_1 = 9$	$alc_1 = 11$	$alc_1 = 13$	$alc_1 = 30$	$alc_1 = 50$	$alc_1 = 100$
10	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
20	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004	0,0003	0,0004
30	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
40	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
50	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0004	0,0005	0,0004	0,0004	0,0005
60	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005
70	0,0004	0,0004	0,0007	0,0007	0,0006	0,0007	0,0006	0,0007	0,0007
100	0,0061	0,0078	0,0078	0,0081	0,0085	0,0079	0,0088	0,0084	0,008
120	0,0072	0,0086	0,0105	0,0106	0,0112	0,0106	0,0112	0,0111	0,0114
150	0,0095	0,0117	0,0139	0,0139	0,0139	0,0142	0,0137	0,0137	0,0139
200	0,0137	0,0154	0,0158	0,0160	0,0161	0,0163	0,0161	0,0161	0,0162
250	0,0154	0,0159	0,0160	0,0163	0,0163	0,0163	0,0162		
300	0,0159	0,0157	0,0160	0,0165	0,0162	0,0164	0,0163	0,0162	0,0163
500	0,0157	0,0157	0,0161	0,0163	0,0162	0,0163	0,0162	0,0165	0,0162
700	0,0158	0,0158	0,016	0,0162	0,0165	0,0163	0,0164	0,0165	0,0161
900	0,0158	0,0158	0,0160	0,0162	0,0163	0,0164	0,0162	0,0163	0,0164

6.5 Plano de Trabalho Executado

Boa parte do Plano de Trabalho proposto foi executado, e a pesquisa foi redirecionada no sentido de simular mais testes para melhor compreender o comportamento do modelo de dinâmica da vegetação M_1 sob a influência de alguns parâmetros.

Técnicas de modelagem matemática foram aplicadas na simulação dos resultados para avaliar a densidade de árvores adultas na população em determinados intervalos de tempo, assim como um apontamento focado na dispersão espacial para analisar futuramente a velocidade de dispersão das sementes.

Investigações a respeito da influência de altas taxas de mortalidade por fatores naturais foram feitas no sentido de tentar verificar se a floresta se sustenta.

- **Leitura, revisão e discussão das referências bibliográficas.**

Esta etapa abrangeu todos os meses do projeto. As referências bibliográficas estão relacionadas à dinâmica de vegetações, dispersão espacial de espécies, invasão biológica e distribuição de probabilidades em grandes distâncias. As referências foram analisadas e discutidas com o supervisor e alguns membros do grupo de pesquisa e estão listadas no último capítulo deste relatório.

- **Estudo de Técnicas de Modelagem envolvendo Fenômenos de Dispersão.**

Nesta etapa foi realizado um estudo sobre a seleção e a implementação de algumas rotinas do modelo computacional focando na análise de técnicas de modelagem considerando o fenômeno de distribuição espacial, baseado no indivíduo, bem como suas aplicações.

- **Estudo de Funções de Distribuição de Cauda Longa.**

Aqui foi analisada e testada uma função de probabilidade para melhor mensurar a densidade da população arbórea que pode ser usada para modelar fatores externos na dispersão de indivíduos em uma população.

- **Melhorias no modelo de dispersão com a inserção de novas técnicas de modelagem computacional.**

Nesta etapa, foram implementados e discutidos alguns algoritmos e computacionais de forma a promover um melhor entendimento no comportamento do modelo para a dinâmica da vegetação, visando melhorias no modelo de dispersão e na compreensão de seu comportamento.

- **Melhorias no modelo de dispersão com novas pdfs.**

Concomitantemente às melhorias nos algoritmos, algumas funções de distribuição de probabilidade foram testadas visando representar a dispersão espacial de sementes de uma forma melhorada para promover melhorias no comportamento da modelagem do ciclo de vida das árvores.

- **Redação de textos científicos.**

Esta etapa consistiu na redação de manuscritos para participação em eventos científicos e relatórios técnicos de pesquisa.

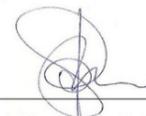
Figura 39: Plano de Trabalho Executado

Mathematical Models of Seeds Dispersal with Application to Species Spread and Biological Invasion
Executed Work Plan

Activities Description	Activities of the Research Project 2017/2018																		
	1 Jun	2 Jul	3 Aug	4 Sep	5 Oct	6 Nov	7 Dec	8 Jan	9 Feb	10 Mar	11 Apr	12 Mai	13 Jun	14 Jul	15 Aug	16 Sep	17 Oct	18 Nov	
1. Reading, review and discussion of the References	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Study of Modeling Techniques for dispersion phenomena		X	X	X	X	X	X	X	X	X									
3. Study of probabilities distribution functions.						X	X	X	X	X	X	X	X						
4. Improvements in the dispersion model with insertion of new computational techniques. 4.1 Simulations of the model					X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5. Improvements in the dispersion model with new probability distributions. 5.1 Simulations of the model									X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6. Writing scientific documents (abstracts for publication and participation in national or international conferences).											X	X	X	X	X	X	X	X	X



 Sergei Petrovskii



 Jaqueline Maria da Silva

6.6 Atividades Realizadas

1. Estudos sobre Modelagem através de nichos de invasão biológica. Estudo, análise e discussão da técnica usando as referências [6], [7], [8] e [1].
2. Discussão e redação do manuscrito *A Stochastic Model for Growth and Seed Dispersion of Vegetation Inspired by the Amazon Floodplain Forest*.
3. Atuação como revisora de manuscrito científico para a *Ecological Complexity* a pedido do Prof Sergei que é o editor chefe da revista. Ver Figura 40.
4. Estudos sobre Modelagem através de invasão biológica com modelos Lattice Boltzmann e o Efeito Alle. Estudo, análise e discussão da técnica usando as referências [2] e [22].
5. A pedido do supervisor, foram feitas novas simulações do algoritmo do Modelo M_1 inicialmente apresentado em [3].
6. Nova consulta por e-mail junto a pesquisadores do INPA-AM sobre dados de densidade, germinação, sombreamento, etc de algumas espécies arbóreas.
7. Coleta de Dados (densidade e diversidade) para usar no algoritmo M_1 nas referências [5], [28] e [17].
8. Estudo, análise e discussão de referência bibliográfica sobre *Stress Gradient* [11].
9. Estudo sobre núcleos de Distribuição Uniforme, Cauchy e Gaussiana e sobre Ondas Viajantes;
10. Reunião na Universidade de Manchester com Maurício Kritz do Laboratório Nacional de Computação Científica e Jean Marc da Universidade de Manchester.
11. Reunião na Universidade de Leicester com o Prof Maurício Kritz do Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC e o Prof Sergei Petrovskii com discussões sobre a redação do manuscrito *A Stochastic Model for Growth and Seed Dispersion of Vegetation Inspired by the Amazon Floodplain Forest*.

12. Simulações do modelo M_1 considerando a variação do alcance alc_1 e da densidade u . Cálculo das densidades máxima, mínima e da média entre os valores máximos e mínimos.
13. Estudos sobre funções de distribuição de cauda longa.
14. Revisão final da dissertação de Adaias Correa da Silva, discente e orientando do PROFMAT para entrega de versão final na PRPPG-UFVJM.
15. Revisão final da dissertação de Paulo Geovane Ramalho Pinheiro, discente e co-orientando para defesa de dissertação que ocorreu no dia 29 de setembro de 2017.
16. Estudo sobre Sistemas Dinâmicos e a Teoria da Ergodicidade.
17. Simulações do modelo M_1 considerando a variação do alcance de dispersão alc_1 e da densidade da população u . Esboço de diversos tipos de gráficos.
18. Simulação do modelo M_1 para redação de resultados para participação do evento Workshop de Modelos Matemáticos para Ecologia na Universidade de Birmingham.
19. Produção de resumo para os Anais do Workshop de Modelos Matemáticos para Ecologia da Universidade de Birmingham.
20. Palestra ministrada no Workshop de Modelos Matemáticos para Ecologia na Universidade de Birmingham. Ver Figura 41. Página do evento: <https://goo.gl/bwmp4e>
21. Correção, re-adaptação e simulação de vários testes usando do modelo M_1 para produzir resultados para participação no Models in Population Dynamics, Ecology, and Evolution - MPDEE-18.
22. Organização de dados e produção de texto científico para participação no *Models in Population Dynamics, Ecology, and Evolution - MPDEE 2018*.
23. Participação como palestrante no *Models in Population Dynamics, Ecology, and Evolution - MPDEE 2018*. Ver Figura ?? Página do evento <https://goo.gl/KpTWKa>
24. Reunião com o pesquisador *Ran Nathan* do Departamento de Evolução, Sistemática e Ecologia da *The Hebrew University of Jerusalem* gerando a discussão de resultados e alguns novos direcionamentos do modelo M_1 .
25. Estudo das referências propostas pelo pesquisador *Ran Nathan*: [12] e [13].

26. Produção de Artigo Científico para submissão para o volume especial de textos científicos a serem publicados nos Anais do MPDEE 18.
27. Continuação dos Estudos de Modelos de Dispersão de Cauda longa usando como referências os textos [14], [25]
28. Reescrevendo o algoritmo do modelo M_1 visando representação da velocidade da dispersão das sementes.
29. Simulação do modelo M_1 considerando as novas alterações visando gerar resultados de velocidade e dispersão .
30. Produção do Relatório Final Técnico Científico.

Figura 40: *Convite para Revisão de Artigo*

Given your expertise in this area, I would appreciate your comments on the above paper. I have included the abstract of the manuscript below to provide you with an overview.

If you accept this invitation, your comments will be due within 31 days. If you are unable to act as a reviewer at this time, I would greatly appreciate your suggestions for alternate reviewers.

To accept this invitation, please click here:

<https://ees.elsevier.com/ecocom/l.asp?i=15001&l=I416T7VT>

To decline this invitation, please click here:

<https://ees.elsevier.com/ecocom/l.asp?i=15000&l=JKRBWXCC>

Alternatively, to register your response using the Elsevier Editorial System please do the following:

1. Go to this URL: <https://ees.elsevier.com/ecocom/>

2. Enter your login details:

Your username is: jaqueline.silva@ufvjm.edu.br

If you need to retrieve password details, please go to: http://ees.elsevier.com/ECOCOM/automail_query.asp



Figura 41: *Lista de Apresentações do META 2017*



Figura 42: *Certificado de Participação do META 2017*

7 Produção Científica no Período

1. Correção das sugestões dos revisores e finalização do artigo para a revista *Ciência e Natura* intitulado “Usando o GeoGebra para o Ensino de Sólidos de Revolução” com aceite para publicação emitido em 23 de junho de 2017 conforme mostra a Figura 44.

Este trabalho é resultado de uma disciplina ministrada por mim e pela Profa Dra Deborah no PROFMAT em maio de 2016 em colaboração com o Prof Dr Alexandre Faisall e os estudantes Lucas Rodrigues Pereira, Mário Guimarães Gomes e Nicson Nongelle Gomes Pinheiro.

O projeto de pesquisa referente às atividades desta disciplina está registrado na PRPPG 2482016 “Fundamentos de Cálculo: Estudo de Metodologias de Ensino



Figura 43: *Certificado de Participação do MPDEE 2018*

envolvendo Tecnologias”.

2. Redação, submissão dos trabalhos abaixo listados para o ICMSquare (*6th International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences*). Todos os três trabalhos listados a seguir estão relacionados a dissertações de meus ex-orientandos no PROFMAT.

EDITOR DECISION

Decision	Accept Submission 2017-06-23
Notify Editor	 Editor/Author Email Record  2017-06-23
Editor Version	None
Author Version	25400-132044-1-ED.PDF 2017-06-16 DELETE
Upload Author Version	<input type="button" value="Escolher arquivo"/> Nenhum arquivo selecionado <input type="button" value="Upload"/>

Ciência e Natura

EISSN 2179-460X

ISSN 0100-8307

Figura 44: Correspondência de Aceite de artigo para a Revista *Ciência e Natura*

3. *The Use of Modeling for Teaching Exponential Functions* em co-autoria com Dérek Bomfim Prates (egresso da Engenharia de Produção da UFVJM e mestrando do LNCC) e Lincoln Ferreira Nunes (egresso do PROFMAT).

Este trabalho é resultado do projeto PRPPG 2472016 intitulado “Modelos de Crescimento Populacional Aplicados ao Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas”.

4. *Modelling Plane Geometry: the connection between Geometrical Visualization and Algebraic Demonstration* em co-autoria com Lucas Rodrigues Pereira (egresso do PROFMAT) e a Profa Dra Deborah Faragó Jardim.

Este trabalho é resultado do projeto PRPPG 2202016 intitulado “Práticas de Ensino de Geometria Plana usando GeoGebra”.

5. *Using Mathematical Models to Teach Functions to Secondary Students* em co-autoria com Thamara Vieira Nepomucena (discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia), Adaias Corrêa da Silva (egresso do PROFMAT) e a Profa Dra Deborah Faragó Jardim.

Este trabalho é resultado do projeto PRPPG 2962016 intitulado “Ensino de Funções Usando Recursos Computacionais”.

6. Correção e finalização do artigo “Um estudo sobre o uso de modelos para construção de residência urbana com telhado verde em Teófilo Otoni - MG” para a Revista *Espacios* produzido em colaboração com os discentes Daiany Campelo Souza, Elidaiany Silva Santos, Luély Souza Guimarães, Luiz Gustavo Batista Figueiredo, Marina Almeida Ferreira, do Bacharelado em Ciência e Tecnologia.

Este trabalho foi aceito e publicado na edição 36 da Revista *Espacios* conforme mostra a Figura 45. A Revista *Espacios*.



Renato Valdivieso <renatovaldivieso@gmail.com>

para mim ▾



Estimada profesora Jaqueline M da Silva, su artículo fue aprobado y será publicado en el Vol.38(36)2017 que aparecerá durante el mes de agosto.

Cordiales saludos

Revista **Espacios**



Figura 45: Correspondência de Aceite de artigo para a Revista *Espacios*

7. Correção, finalização e entrega junto aos órgãos competentes (SBM e UFVJM) da versão final dissertação do discente do PROFMAT Lincon Ferreira Nunes intitulada “Modelos de Crescimento Populacional Aplicados ao Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas”[15].
8. Redação de manuscrito científico em colaboração com a pesquisadora Profa. Dra Ana. Carolina Carius do IFRJ - Campus Caxias, intitulado “Modelagem Matemática e Cálculo Diferencial: uma experiência em um curso de Licenciatura em Química”.

O texto é um resultado de uma parceria entre dois grupos de pesquisa que está registrada no diretório de grupos do CNPq certificado pela UFVJM intitulado “Grupo de Estudos e Modelagem de Sistemas Ambientais”.
9. Aceitação dos trabalhos “*The Use of Modeling for Teaching Exponential Functions*”, “*Modelling Plane Geometry: the connection between Geometrical Visualization and Algebraic Demonstration*” e “*Using Mathematical Models to Teach Functions to Secondary Students*” para serem publicados como artigos no *IOP Journal of Physics: Conference Series*.
10. Publicação do artigo “Um estudo sobre o uso de modelos para construção de residência urbana com telhado verde em Teófilo Otoni - MG” [27] na Revista *Espacios*.

Correção e finalização do artigo “Um estudo de áreas de telhados usando conceitos geométricos e recursos computacionais” para a Revista ABENGE produzido em colaboração com os discentes Daniel de Carvalho Gonçalves, Isamara Coelho Neves, João Vitor Pereira de Deus, Karolayne Gonçalves Cota, Wdson Lopes Ferreira do Bacharelado em Ciência e Tecnologia do Campus Mucuri.

Publicação do artigo “Usando o GeoGebra para o Ensino de Sólidos de Revolução” [18] na Revista Ciência e Natura.

Publicação dos artigos “*The Use of Modeling for Teaching Exponential Functions*” [16], “*Modelling Plane Geometry: the connection between Geometrical Visualization and Algebraic Demonstration*” [19] e “*Using Mathematical Models to Teach Functions to Secondary Students*” [24] no *IOP Journal of Physics: Conference Series*.

Palestra no Workshop de Modelos Matemáticos para Ecologia na Universidade de Birmingham.

Palestra no MPDEE na Universidade de Leicester.

Produção de Relatório Técnico Científico.

8 Considerações Finais

8.1 Contribuição da Pesquisa para o Ensino

As habilidades e técnicas de modelagem aprimoradas junto ao Grupo de Pesquisa em Matemática Aplicada da Universidade de Leicester, além de terem contribuído para ampliar a capacidade e a eficiência da autora deste relatório enquanto pesquisadora, também desenvolveu e aumentou sua capacidade enquanto docente e orientadora de estudantes de graduação e programas de Pós Graduação, e portanto, enquanto formadora de recursos humanos do Campus Mucuri da UFVJM.

Considerando que as orientações de Trabalhos de Conclusão de Curso, de Iniciação Científica, (conforme mostram [20, 21, 10]) estavam consolidando a habilidade da autora enquanto peça fundamental para formação discente, de certo as habilidades adquiridas fortalecerão tal capacidade, assim como a dos programas de Graduação e Pós Graduação do qual faz parte.

De fato, pois um dos primeiros trabalhos a ser diretamente influenciado por esta experiência será o que estava sendo desenvolvido junto ao grupo GESE, o "Grupo de Estudos sobre Softwares no Ensino e Pesquisa" onde modelos matemáticos e computacionais eram desenvolvidos usando conceitos de matemática, física e meio ambiente, visando melhor entendimento e envolvimento dos estudantes e docentes.

Com relação à contribuição para a Pós Graduação, a autora pretende retornar às atividades de pesquisadora junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede - PROFMAT na UFVJM, bem como de orientadora de estudantes do programa visando contribuir para a formação dos docentes de Matemática da região dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

A autora também tem planos de, em março de 2019, se credenciar enquanto docente colaboradora de outro Programa de Pós Graduação da instituição, o Tecnologia, Ambiente e Sociedade - TAS, que também apresenta uma linha de pesquisa na área de Modelagem Matemática e Computacional. Assim, o aprendizado e a experiência adquiridos com a colaboração com o Prof Sergei Petrovskii e a Universidade de Leicester também motivaram e inspiraram a docente a contribuir ainda mais para o fortalecimento dos programas de Pós Graduação do Campus Mucuri e, conseqüentemente, para o desenvolvimento das atividades de pesquisa da região.

8.2 Potencial para o aumento da rede de pesquisa

Considerando que a autora da proposta coordena na UFVJM um grupo de pesquisa certificado pelo CNPq intitulado "Grupo de Estudos e Modelagem de Sistemas Ambientais" em colaboração com o Laboratório Nacional de Computação Científica e, nos últimos anos vem trabalhando em pesquisas relacionadas a problemas ambientais, tal projeto de pesquisa fortalece este grupo de pesquisa, assim como contribui para o crescimento da UFVJM, particularmente, o Campus Mucuri, uma vez que proporciona a expansão de parcerias com pesquisadores membros de outros grupos de pesquisa institucionais ou, até

mesmo, de outras universidades.

De fato, pois, como reflexo da produção científica nos últimos anos e da aprovação do Projeto de Pós Doutorado, a autora foi convidada para estreitar os laços de produção científica com o Grupo de Pesquisa da UNIVATES intitulado "Modelagem em Sistemas Ambientais".

8.3 Relevância da realização da pesquisa no exterior

Durante estudos desenvolvidos em 2005 no Instituto Nacional de Pesquisas Amazônicas – INPA em parceria com o Laboratório Nacional de Computação Científica, verificou-se que os processos de dispersão e de crescimento da vegetação são fortemente influenciados pelo regime hidrológico dos rios. Tal influência ocorre na fase inicial do ciclo de vida da vegetação e afeta a distribuição, a estrutura e a dinâmica da população arbórea. Os estudos dos processos de crescimento arbóreo e dispersão de sementes são extremamente importantes para compreender a dinâmica de ecossistemas inundáveis e definir procedimentos para uma gestão sustentável.

No Brasil, particularmente na Floresta Amazônica, a presença de ecossistemas inundáveis, assim como sua complexidade, é dominante exatamente em regiões de interesse para a agricultura. Neste sentido, é fundamental que pesquisadores de várias universidades brasileiras e estrangeiras estejam envolvidos produzindo conhecimento e tecnologia para explorar de forma sustentável as características deste ecossistema.

Desta forma, pela renomada competência em trabalhar com modelos matemáticos de dispersão e invasão na fenomenologia biológica, o Grupo de Pesquisa coordenado pelo Prof. Dr. Sergei Petrovskii do Departamento de Matemática da Universidade de Leicester, considerando que têm, ao longo dos últimos anos, desenvolvido pesquisa de significativa relevância científica em escala mundial (vide alguns textos produzidos citados aqui neste relatório), se tornam colaboradores científicos fundamentais nessa busca por conhecimento e desenvolvimento científico.

O estreitamento de relações científicas internacionais com um dos Departamentos De Matemática mais conceituados na área de Modelagem Matemática do Reino Unido, assim como outras futuras colaborações que podem surgir desta experiência, fortalecerá as relações internacionais da UFVJM, assim como os grupos de pesquisa e programas de Pós Graduação do Campus Mucuri da UFVJM nos quais a autora está vinculada e ativa.

9 Referências Bibliográficas

Referências

- [1] A. Morozov, S. Petrovskii Bai-Lian Li, Spatiotemporal complexity of patchy invasion in a predator-prey system with the Allee effect. *Journal of Theoretical Biology*. 238 (2006). 18-35.
- [2] D. C. Mistro, L. A. D. Rodrigues, S. Petrovskii. Spatiotemporal complexity of biological invasion in a space-and time-discrete predator-prey system with the strong Allee effect. *Ecological Complexity*. v. 9. p. 16-32. Elsevier. 2012.
- [3] Jaqueline Maria da Silva. Modelos para a dinâmica da vegetação em áreas alagáveis amazônicas. Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC. 2011
- [4] Kritz, M. V., Silva, J. M., Mazza, C. Modelos e Sustentabilidade nas Paisagens Amazônicas Alagáveis. Editora SBMAC - Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. 2012.
- [5] Junk, W. J. The Central Amazon Floodplain: Ecology of a Pulsing System. Chapter General aspects of floodplain ecology with special reference to Amazonian floodplains. *Ecological Studies* 126, Springer, Berlin. 1997.
- [6] Lewis, M. A., Petrovskii, S. V., Potts, J. R. The Mathematics Behind Biological Invasions. *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Chapter 2. Dynamics of Biological Invasions. p.19-68. v. 44. Springer. 2016.
- [7] Lewis, M. A., Petrovskii, S. V., Potts, J. R. The Mathematics Behind Biological Invasions. *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Chapter 3. Reaction-Diffusion Models: Single Species. p.69-106. v. 44. Springer. 2016.
- [8] Lewis, M. A., Petrovskii, S. V., Potts, J. R. The Mathematics Behind Biological Invasions. *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Chapter 4. Invasion in a Multispecies System. p.69-106. v. 44. Springer. 2016.
- [9] Lewis, M. A., Petrovskii, S. V., Potts, J. R. The Mathematics Behind Biological Invasions. *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Chapter 5. Long-Distance Dispersal and Spread. p.69-106. v. 44. Springer. 2016.
- [10] Lopes, A. A. S., Gomes, J. L., Souza, L. C., Silva, J. M. Modelagem do comportamento dispersivo de material impactante em um lago por meio da Equação de Difusão-Advecção. *Revista Ciência e Natura*. v. 38. p. 756-763. 2016.
- [11] Malanson, G. P., Resler, L. M. *Neighborhood functions alter unbalanced facilitation on a stress gradient*. *Journal of Theoretical Biology*. v. 365. p. 76-83. 2015.

- [12] Nathan, R. Horvitz, N. Yanping He, Kuparinen, A., Schurr, F. M., Katul, G. G. Spread of North American wind-dispersed trees in future environments. *Ecology Letters*, 14: p. 211–219. 2011.
- [13] Nathan, R., Casagrandi, R. A simple mechanistic model of seed dispersal, predation and plant establishment: Janzen-Connell and beyond. *Journal of Ecology*. 92, 733–746. 2004.
- [14] Nathan R., Katul G. G., Horn H. S., Thomas S.M., Oren R., Avissar R. et al. Mechanisms of long-distance dispersal of seeds by wind. *Nature*, 418, 409-413. 2002.
- [15] Nunes, L. F. 2017. Masther's thesis. Modelos de Crescimento Populacional Aplicados ao Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. PROFMAT.
- [16] Nunes, L. F., Prates, D. B., Silva, J. M. 2017. *The Use of Modeling for Teaching Exponential Functions. IOP Journal of Physics: Conference Series*.
- [17] Parolin, P., Oliveira, A. C., Piedade, M. T. F., Wittmann, F., Junk, W. J. Pioneer trees in Amazonian floodplains: three key species form monospecific stands in different habitats. *Folia Geobotanica*. v. 37. p. 225-238. 2002.
- [18] Pereira, L. R., Gomes M. G., Pinheiro, N. N. G., Silva, J. M., Jardim, D. F., Brito, A. F. 2017. Usando o GeoGebra para o Ensino de Sólidos de Revolução. *Revista Ciência e Natura*. v.39. n. 3.
- [19] Pereira, L. R., Jardim, D. F., Silva, J. M., 2017. *Modelling Plane Geometry: the connection between Geometrical Visualization and Algebraic Demonstration. IOP Journal of Physics: Conference Series*.
- [20] Prates, D. B., Jardim, C.L. T. F., Figueiredo L. A., Silva, J. M., Kritz, M. V. Simulations of a epidemic model with parameters variation analysis for the dengue fever. *Journal of Physics. Conference Series*. v. 633. p. 12008-12012, 2015.
- [21] Prates, D. B., Jardim, C. L. T. F., Figueiredo L. A., Silva, J. M., Kritz, M. V. Comparison of vaccination strategies in an epidemic scenario. *Conference Series*. 2016.
- [22] Rodrigues, L. A. D., Mistro, D. C., Petrovskii, S. *Pattern formation in a space and time-discrete predator-prey system with a strong alle effect. Theoretical Ecology*. v. 5. p. 341-362. Springer. 2012.
- [23] Seno, H., Koshiba, S. A Mathematical Model for Invasion Range of Population Dispersion Through a Patchy Environment. *Biological Invasions*. v 7. p. 757-770. 2005.

- [24] Silva, A. C., Nepomucena, T. V., Jardim, D. F., Silva, J. M. *Using Mathematical Models to Teach Functions to Secondary Students. IOP Journal of Physics: Conference Series.* 2017.
- [25] Scheller R. M., Mladenoff D. J. A spatially interactive simulation of climate change, harvesting, wind, and tree species migration and projected changes to forest composition and biomass in northern Wisconsin, USA. *Glob. Change Biol.*, 11, 307-321. 2005.
- [26] Silva, J. M., Kritz, M. V. A model for seed dispersion and vegetation growth. *Journal of Physics. Conference Series.* v. 738. 2016.
- [27] Souza, D. C., Santos, E. S., Guimarães, L. S., Figueiredo, L. G. B., Ferreira, M. A., Silva, J. M. 2017. Um estudo sobre o uso de modelos para construção de residência urbana com telhado verde em Teófilo Otoni - MG. *Revista Espacios.* v. 38. n. 37.
- [28] Worbes, M., Klinge, H., Revilla, J. D., Martius, C. On the dynamics, floristic subdivision and geographical distribution of várzea forests in Central Amazonia. *Vegetation Science.* v. 3. p. 553-564. 1992.