



Ministério da Educação – Brasil
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM
Minas Gerais – Brasil
Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas
Reg.: 120.2.095 – 2011 – UFVJM
ISSN: 2238-6424
QUALIS/CAPES – LATINDEX
Nº. 08 – Ano IV – 10/2015
<http://www.ufvjm.edu.br/vozes>

Estudando Limites com o GeoGebra

Profª. Drª. Deborah Faragó Jardim
Doutora em Física pela Universidade Federal do Espírito Santo
Docente da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/7626923298872191>
E-mail: dfjardim@gmail.com

Profª. Drª. Jaqueline Maria da Silva
Doutora em Modelagem Computacional pelo Lab Nacional de Computação Científica
Docente da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/4343491423219191>
E-mail: jaquemsilva@gmail.com

Marcela Martins Pereira
Discente do curso de Engenharia de Produção
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/7628477131867434>

Eduardo Antônio Soares Júnior
Discente do curso de Ciência e Tecnologia
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/3019079773531348>

Thâmara Vieira Nepomucena
Discente do curso de Ciência e Tecnologia
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/0749470696531423>

Thaís Rodrigues Pinheiro
Discente do curso de Ciência e Tecnologia
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Teófilo Otoni - MG - Brasil
<http://lattes.cnpq.br/4715805004146142>

Resumo: Esse trabalho é fruto de atividades de ensino e pesquisa desenvolvidas na UFVJM sobre o uso de tecnologia como recurso didático em disciplina de matemática. Os estudos foram baseados em propostas de metodologia francesa que surgiu na década de 1980, com pesquisas voltadas à didática para o ensino da matemática. O conteúdo de Funções e Limites, estudado no início da disciplina Funções de Uma Variável, no curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, *Campus* de Teófilo Otoni, é o objeto de análise nesse trabalho. Utilizou-se o *software* GeoGebra na construção de um modelo que funciona na forma de um “*quiz*”, estimulando o estudante na resolução dos exercícios.

Palavras-chave: GeoGebra. Limites. Modelagem.

Introdução

A Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, em particular o *Campus* do Mucuri, localiza-se na cidade de Teófilo Otoni, a nordeste da capital do estado de Minas Gerais. Muitos alunos dessa instituição terminaram o ensino médio em escolas públicas da cidade e da região (JARDIM, 2012a).

Pesquisas indicam que os estudantes concluem o ensino básico sem compreender a matemática, com dificuldades nos conceitos básicos e as respectivas aplicações (SOBRINHO, DECHECHI & DETONI, 2005; CURY 2003). Esse fato se repete no ensino superior e contribui com o índice de reprovação em disciplinas de matemática (JARDIM, 2012a; MOLON & FIGUEIREDO, 2013) e física. Além disso, a maior parte dos discentes não tem hábitos de estudo e isso pode acarretar problemas de adaptação na transição do ensino médio para o superior (JARDIM, 2012b).

O curso de Ciência e Tecnologia (BC&T), com duração de três anos, fornece a base para que o estudante possa, ao fim desse período, optar por uma das engenharias oferecidas pela instituição, precisando, a partir daí, de dois anos mais para a conclusão do curso (UFVJM, 2012). O primeiro período do BC&T apresenta alto índice de reprovação e evasão, seguindo o padrão verificado em outras instituições de ensino superior no país (BARUFI, 1999; NASSER, 2007; REZENDE,

2003; VIANA, 2004), nos cursos das áreas das ciências exatas. Apesar disso, os professores tem buscado melhorar a qualidade de ensino, aplicar novas metodologias e reduzir a taxa de reprovação e evasão (JARDIM, 2012c).

Sendo o BC&T um curso com caráter interdisciplinar, com forte apelo no conhecimento e uso da tecnologia, a matemática e a tecnologia de informação são fundamentais. Por essa razão, a utilização de *softwares* no ensino auxilia o estudante na visualização e na resolução de problemas, ou mesmo na construção de conceitos que são vistos no conteúdo teórico da disciplina, uma vez que Amorim, Souza e Salazar (2011) afirmam que

um ambiente educacional informatizado possibilita ao aluno a construção do seu conhecimento, pois com auxílio de um recurso computacional o estudante pode modelar problemas e fazer simulações, além de visualizar uma situação que muitas vezes não seria possível sem essa ferramenta.

A forma de se aplicar o recurso tecnológico no ensino depende da metodologia escolhida pelo professor da disciplina e da didática que adotará. Métodos de ensino são o foco de estudo de pesquisadores em diversos países. Na década de 1980, surgiu na França a noção de Engenharia Didática como uma metodologia de pesquisa, que possui tal denominação por se tratar de tarefa semelhante à de um engenheiro no que tange ao procedimento da construção a partir de um planejamento bem elaborado e baseado nos conhecimentos prévios, dentre outras coisas (ARTIGUE, 1996). Esse artigo segue a linha dessa didática.

O trabalho ora apresentado teve seu início a partir de atividades realizadas com os alunos do primeiro período do curso de Ciência e Tecnologia, na disciplina Funções de Uma Variável (FUV). Foram ofertados minicursos sobre o uso do *software* GeoGebra com aplicações nessa disciplina, com o acompanhamento do docente responsável. O uso da ferramenta computacional tem sido prática constante desde que as tarefas se iniciaram.

Em todo o trabalho foram inseridas figuras produzidas a partir do *software* GeoGebra, cujas origens são autorais.

Por que o GeoGebra?

Diversos *softwares* existentes no mercado, pagos ou gratuitos, têm sido utilizados como ferramenta auxiliar no ensino de matemática (JARDIM, 2012c; MARIANI 2010; SOUSA 2011). Alguns deles com maior aplicabilidade num certo conteúdo que outros. Nesse trabalho, o aplicativo escolhido foi o GeoGebra, classificado como um *software* matemático que reúne os conceitos da geometria e da álgebra. Ademais, trata-se de um aplicativo de distribuição livre, escrito em linguagem Java, podendo estar disponível em diferentes plataformas.

O *software* GeoGebra, em sua estrutura, é prático e dinâmico permitindo que os discentes absorvam com maior facilidade os conceitos e conteúdos abordados em sala de aula. É uma ferramenta que torna as aulas mais interessantes e esclarecedoras, proporcionando melhor compreensão, estudantes mais motivados e consequentemente melhores resultados, através da exploração da modelagem. Enfatizando essa ideia, Souza (2011) alega que:

Por ser um programa de Geometria Dinâmica, o GeoGebra facilita a investigação dos alunos, que podem movimentar os objetos e acompanhar as variações ocorridas, fazer conjecturas e testá-las, além de relacionar os conteúdos algébricos e geométricos.

As ferramentas do GeoGebra possibilitam criar diferentes tipos de modelos para atingir o objetivo pretendido. A utilização dessas ferramentas proporciona a interação dinâmica e instantânea do usuário com o modelo construído. Como exemplo pode-se citar o campo de texto, o controle deslizante, o uso de botões, texto, lista suspensa e caixa de seleção. Como complementação à tarefa, o GeoGebra incentiva o raciocínio lógico e possibilita o uso de comandos de condição e repetição, fundamentais na criação de um sistema do tipo "quiz", como é o caso.

O Tratamento de Limites com o GeoGebra

Normalmente, o conteúdo de Limite não é visto em matemática no ensino médio (MOLON & FIGUEIREDO, 2013). Por essa razão, no primeiro contato do estudante com a disciplina FUV ele se depara com um assunto novo e abstrato, que exige raciocínio, produção e visualização gráficas. Pode-se observar que

[...]num contexto inicial do primeiro contato com o Cálculo, a ênfase no ensino poderia ser dada ao significado, uma vez que o domínio puramente lógico-matemático não é fator suficiente garantidor de uma compreensão satisfatória deste corpus teórico. (ALVES; BORGES NETO, 2012a, p. 341).

Portanto, é preciso colocar o estudante numa posição menos passiva frente ao estudo do conteúdo, explorando a parte gráfica, já que a visualização é uma das grandes dificuldades encontradas pelo estudante. Segundo Alves(2012b), com respeito ao estudo de Cálculo, "a visualização é uma das habilidades cognitivas que pode ser promovida no ensino deste conteúdo e é objeto de atenção por parte de especialistas tanto no Brasil como no exterior". Nesse sentido, o GeoGebra parece ser a escolha perfeita.

Não existem na literatura brasileira muitos trabalhos publicados que utilizem *softwares* no ensino de Limites. Especialmente com respeito ao GeoGebra, os modelos que abordam o conteúdo de Limites nos artigos encontrados não exploram muito os recursos das ferramentas desse programa. Em geral, o que se observa nesses trabalhos é que eles estimulam ou auxiliam na tarefa de introduzir as funções e verificar os gráficos. (MOLON & FIGUEIREDO 2013; NETO 2006; ROCHA 2010; ALVES 2012c; FERRUZIRI 2003)

Em especial, um livro de Cálculo publicado recentemente (ÁVILA, 2012) incentiva o uso de programas como o GeoGebra e o wxMaxima durante as atividades de estudo e resolução de exercícios. Entretanto, é possível explorar um pouco mais as ferramentas de modelagem do GeoGebra para aumentar a eficiência de seu uso. Por exemplo, é possível construir uma rotina que motive o aluno a responder questões estudadas em sala de aula e posteriormente verificar o grau de acerto e de erro. Isso funcionaria como um "quiz", ou seja, um teste de conhecimento que permitiria que o próprio aluno avaliasse os pontos fortes e fracos acerca do conteúdo estudado.

Para que a compreensão dos conceitos seja eficaz, o presente modelo tem como proposta criar uma “roupagem didática”, conforme Chevallard (1991), de modo que o conteúdo de Limites, até então tido como abstrato e de difícil entendimento, seja apreendido pelos alunos, visto que

[...] num conteúdo do conhecimento tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. (CHEVALLARD, 1991, apud BELTRÃO, 2012, p. 39).

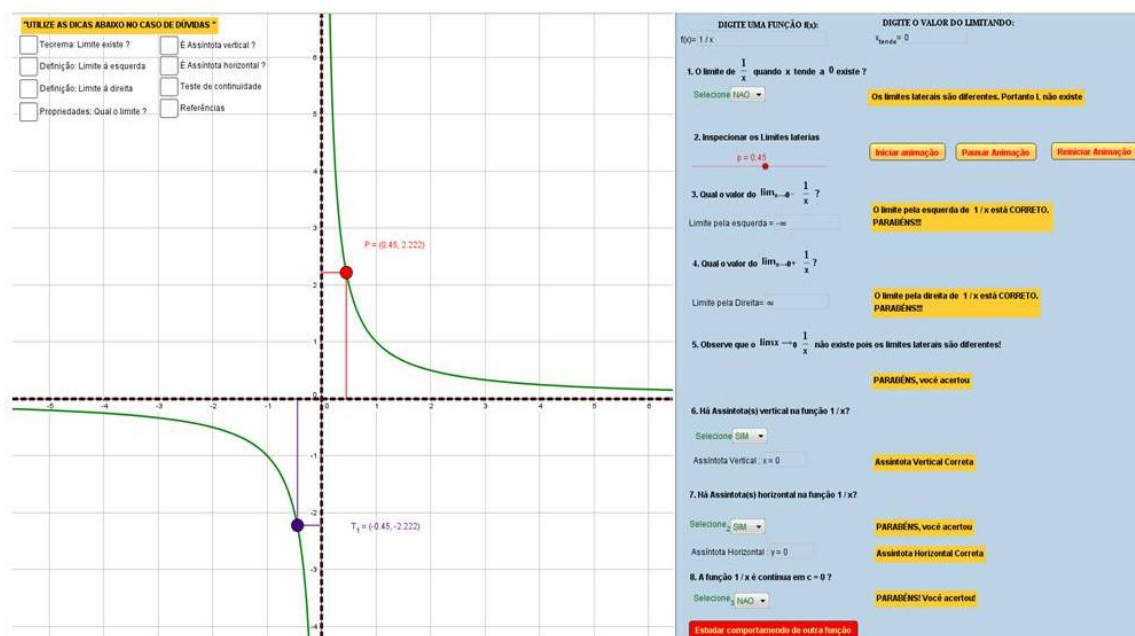
Como se observa, o modelo construído tem como desafio o papel de ser suficientemente didático e eficiente, sem ser cansativo para o estudante. Daí, ele deve ser capaz de interagir com o usuário por meio de animações e ferramentas que ajudem na compreensão dos conteúdos teóricos, explorando os respectivos conceitos, definições e propriedades, tudo isso de forma agradável.

Construindo o Modelo no GeoGebra para o Estudo de Limites

O objetivo aqui é a construção de um modelo capaz de interagir com o usuário e motivar o estudo por meio de atividades do tipo “quiz”. Daí é fundamental interligar o conteúdo teórico com a visualização gráfica, por exemplo, por meio dos textos informativos e de controles deslizantes, auxiliando o aluno na resolução de exercícios e estimulando a busca pelas respostas corretas.

As ferramentas utilizadas no modelo possibilitam, por exemplo, inserir o valor do limitando e a Função nos primeiros campos de entrada e em seguida observar o comportamento gráfico. A Figura 1 apresenta o *layout* do modelo com uma Função teste. O lado esquerdo da imagem apresenta o gráfico da Função digitada no campo de entrada e o lado direito a rotina da modelagem. O aluno deverá entrar com as respostas nos seus respectivos campos, de entrada ou lista de seleção, e verificar se acertou ou não. Caso a resposta esteja incorreta, é exibido o texto informando sobre o erro e solicita-se uma nova tentativa. Em caso de acerto, um texto parabenizando o aluno é apresentado e segue-se para uma nova questão.

Figura 1 - Interface do modelo construído



A ideia de se colocar caixas de texto parabenizando o estudante pelo acerto é uma forma de motivação, já que

[...]a motivação pode ser entendida como um processo e, como tal, é aquilo que suscita ou incita uma conduta, que sustenta uma atividade progressiva, que canaliza essa atividade para um dado sentido. (BALACHO e COELHO, 1996, apud MORAES e VARELA, 2007, p. 3)

Outra particularidade do modelo são os textos informativos, como se observa na Figura 2. Assim, a todo o momento o aluno tem a possibilidade de verificar conceitos teóricos, em caso de dúvidas, bem como estimular a utilização dos livros didáticos, fortalecendo o uso da linguagem escrita. Conforme Cruz(2013):

A matemática é uma disciplina de conteúdos complexos que pode ter a sua compreensão facilitada a partir do uso da linguagem escrita como ferramenta de acesso ao pensamento matemático.

Figura 2 - Textos Informativos

Janela de Visualização

UTILIZE AS DICAS ABAIXO NO CASO DE DÚVIDAS -

☒ Teorema: Limite existe ? ☐ É Assíntota vertical ?

☒ Definição: Limite à esquerda ☐ É Assíntota horizontal ?

☒ Definição: Limite à direita ☐ Teste de continuidade

☒ Propriedades: Qual o limite ? ☐ Referências

Teorema
Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

THOMAS(2009, p.97)

Definição: Limite à esquerda
Dizemos que $f(x)$ tem um limite à esquerda L em x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x , $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

THOMAS(2009, p.97)

Definição: Limite à direita
Dizemos que $f(x)$ tem um limite à direita L em x_0 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$, de maneira que, para todos os valores de x , $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

THOMAS(2009, p.97)

Propriedades dos LIMITES
Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Então

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [c f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

STEWART(2010, p.89)

Teorema do confronto
Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c , exceto, possivelmente, em $x = c$. Suponha também que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$

Então, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

THOMAS(2009, p.81)

Num de seus trabalhos, Da Silva (2014) discute que “o aperfeiçoamento da estrutura, proveniente da organização dos esquemas possibilita ao sujeito, conforme ele avança na ação, organizar e aprimorar também a sua reflexão”. Daí elaborou-seum esquema onde só há possibilidade da próxima pergunta aparecer na tela se a anterior for respondida corretamente (Figura 3), onde a etapa subsequente depende do sucesso da etapa anterior. Tal esquema estimula a curiosidade, interesse e a construção do conhecimento do usuário.

Figura 3 - Funcionamento da sequencia de perguntas.

Janela de Visualização 2

DIGITE UMA FUNÇÃO $f(x)$: $f(x) = \sqrt{2x+1} / (3x)$ DIGITE O VALOR DO LIMITANDO: $x_{tende} = 1$

1. O limite de $\frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$ quando x tende a 1 existe ?
Selecione **NAO** REFAÇA OS CÁLCULOS E TENDE NOVAMENTE

Janela de Visualização 2

DIGITE UMA FUNÇÃO $f(x)$: $f(x) = \sqrt{2x+1} / (3x)$ DIGITE O VALOR DO LIMITANDO: $x_{tende} = 1$

1. O limite de $\frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$ quando x tende a 1 existe ?
Selecione **SIM** PARABÉNS. Os Limites laterais são iguais. Portanto L existe !!!

2. Inspeccionar os Limites laterais
 $p = 0.2$ Iniciar animação Pausar Animação Reiniciar Animação

3. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?
Limite pela esquerda = 0.577 O limite pela esquerda de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

4. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?
Limite pela Direita = 0.577 O limite pela direita de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está INCORRETO. Observe novamente o gráfico de $f(x)$

Janela de Visualização 2

DIGITE UMA FUNÇÃO $f(x)$: $f(x) = \sqrt{2x+1} / (3x)$ DIGITE O VALOR DO LIMITANDO: $x_{tende} = 1$

1. O limite de $\frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$ quando x tende a 1 existe ?
Selecione **SIM** PARABÉNS. Os Limites laterais são iguais. Portanto L existe !!!

2. Inspeccionar os Limites laterais
 $p = 0.2$ Iniciar animação Pausar Animação Reiniciar Animação

3. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?
Limite pela esquerda = 0.577 O limite pela esquerda de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

4. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?
Limite pela Direita = 0.577 O limite pela direita de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

5. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?
L[0.57 O limite de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está INCORRETO. Relembre as propriedades de limites

Para as perguntas com alternativas “SIM” ou “NÃO”, foram criadas listas de seleção suspensa que possibilitam ao usuário selecionar uma das opções (Figura 4) e diversificam os meios pelo qual o usuário responderá as perguntas. Nesse caso o *software* compara se o elemento selecionado está de acordo com o resultado encontrado pelo próprio GeoGebra. Já para questões onde as respostas são valores numéricos foram criados campos de entrada, justamente para aumentar as possibilidades de opções e conceder maior autonomia ao aluno.

Figura 4 - Listas suspensas e caixa de entrada.

DIGITE UMA FUNÇÃO $f(x)$: $f(x) = \sqrt{2x+1} / (3x)$

DIGITE O VALOR DO LIMITANDO: $x_{tende} = 1$

1. O limite de $\frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$ quando x tende a 1 existe ?

Selecione: **SIM**

PARABÉNS. Os Limites laterais são iguais. Portanto L existe !!!

3. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?

Limite pela esquerda = 0.577

O limite pela esquerda de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

4. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?

Limite pela Direita = 0.577

O limite pela direita de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

5. Qual o valor do $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$?

L = 0.577

O limite de $\sqrt{2x+1} / (3x)$ está CORRETO. PARABÉNS!!!

6. Há Assintota(s) vertical na função $\sqrt{2x+1} / (3x)$?

Selecione: **SIM**

Assintota Vertical : $x = 0$

PARABÉNS. Você acertou

Assintota Vertical Correta

7. Há Assintota(s) horizontal na função $\sqrt{2x+1} / (3x)$?

Selecione: **SIM**

Assintota Horizontal : $y = 0$

PARABÉNS, você acertou

Assintota Horizontal Correta

8. A função $\sqrt{2x+1} / (3x)$ é contínua em $c = 1$?

Selecione: **SIM**

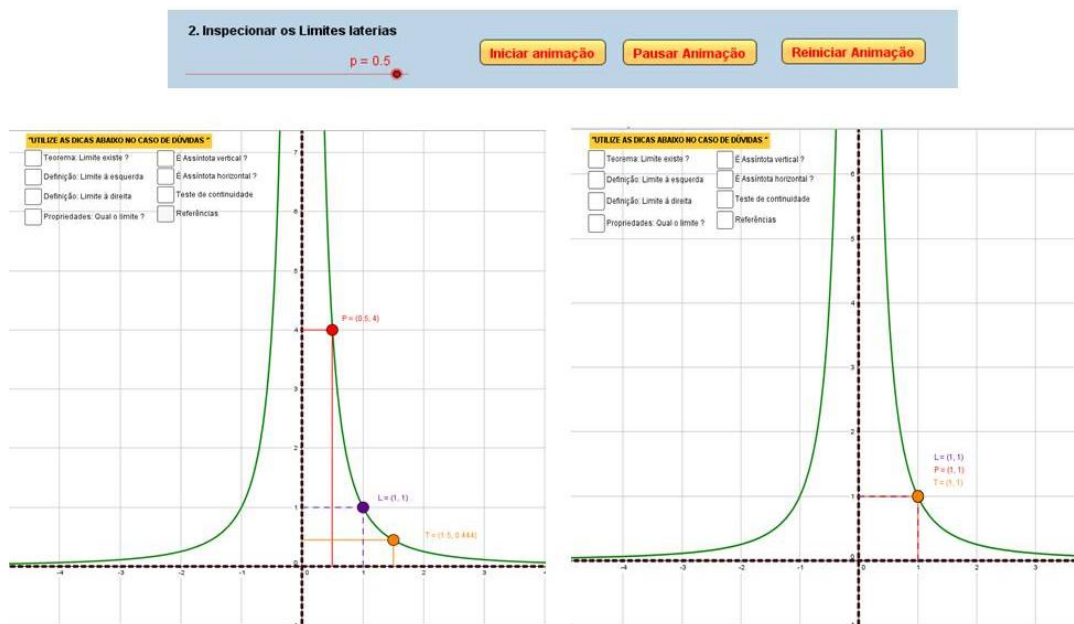
PARABÉNS! Você acertou!

Estudar comportamento de outra função

Alguns pesquisadores que analisam o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes observam que durante o ensino de Limites o discente encontra certa dificuldade para entender o conceito de Limites Laterais na disciplina de Cálculo (NETO, 2006). Para tanto, o modelo construído e analisado nesse trabalho faz uso de ferramentas do GeoGebra, como os botões e controle deslizante, que proporcionam a animação de objetos, tornando o modelo dinâmico e permitindo que

o usuário, por exemplo, certifique se os Limites Laterais são iguais ou não, e se tendem ao mesmo valor, como demonstrado na Figura 5.

Figura 5 - Controle Deslizante para analisar o comportamento dos Limites Laterais



Para aumentar a dinâmica do modelo é possível, por meio de botões, que o aluno inicie, pause, e reinicie a animação dos pontos P e T, quantas vezes forem necessárias (Figura 5) exatamente para que possa observar o comportamento dos Limites Laterais. Esse tipo de modelo, justamente por sua característica de oferecer a animação, atrai e prende a atenção dos alunos durante as atividades.

Testando o Modelo

Para aplicar e testar o modelo foi escolhida uma Função sugerida por quatro alunos que realizaram as atividades. Trata-se da Função algébrica $p(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$, onde foi avaliado o limite para o qual x tende a 0, ou seja, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}}{3x}$. Observa-se, em primeiro momento, que o Limite está tendendo justamente para onde a Função não está definida. Se o aluno não estiver atento à peculiaridade dessa Função ele poderá utilizar equivocadamente a regra da substituição direta.

Para o esboço do gráfico manualmente, o aluno pode apresentar diversas dificuldades (FROTA, 2006; NASSER, 2007), já que ele precisa ter o conhecimento quanto às estruturas básicas do comportamento da Função: raízes, simetria,

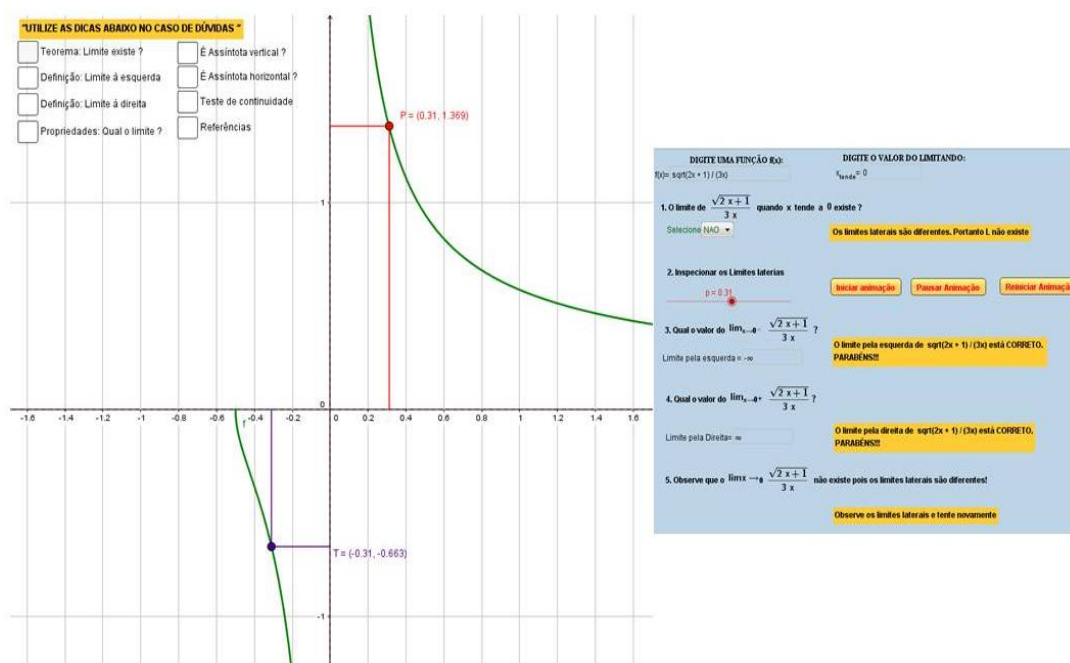
domínio e imagem. Assim, utilizando o modelo construído é possível perceber como a visualização gráfica facilita o entendimento da Função.

Ao analisar o gráfico é possível perceber a restrição no domínio e de maneira intuitiva a observação leva a concluir que existem assíntotas verticais, e de maneira análoga a restrição na imagem leva a existência de assíntotas horizontais. A abordagem dinâmica realizada pelo *software* com o conhecimento matemático do aluno favorece o aprendizado, já que os teoremas estudados em FUV

[...] podem ser explorados, numa abordagem que privilegia um primeiro entendimento intuitivo, quando empregamos expedientes didáticos que evidenciam propriedades geométricas envolvidas (ALVES, p. 5, 2012b).

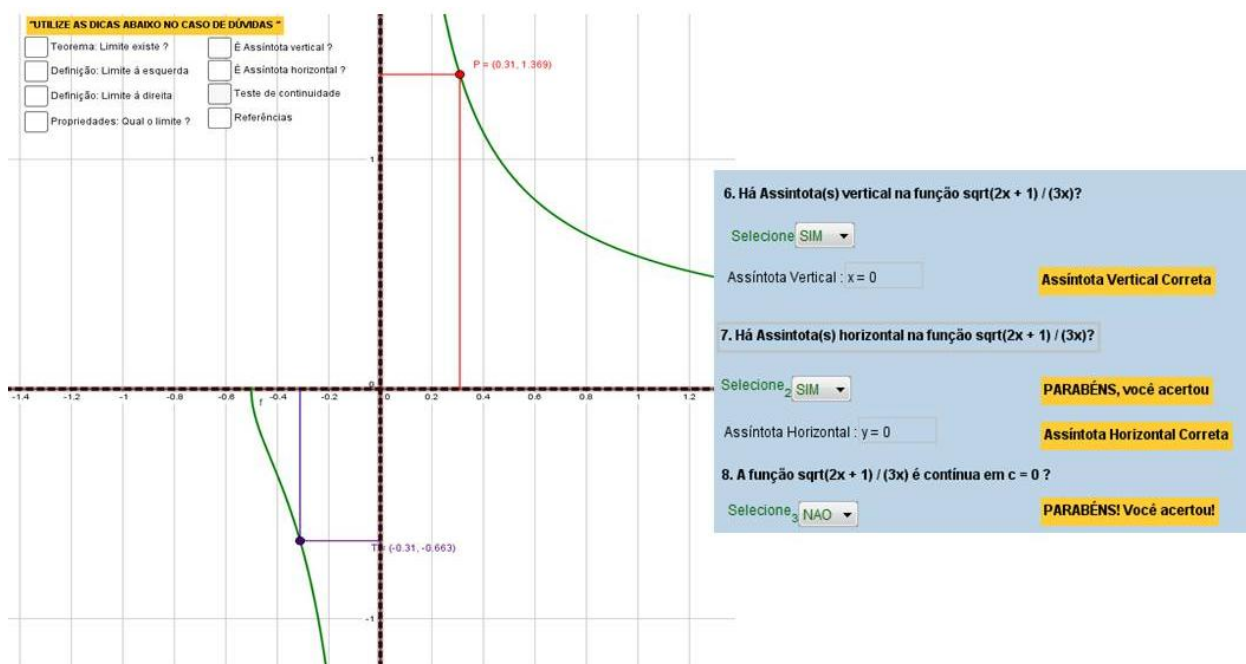
Para responder a pergunta "Qual o Limite da Função?" o aluno terá que analisar a existência do Limite. Observando graficamente, de acordo com a Figura 6, é possível verificar que $\lim_{x \rightarrow 0^-} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = \infty$. É importante ressaltar que a Função está bem definida quando $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ e $x > 0$. Ademais, aplicando a definição de assíntotas, conclui-se a inexistência do limite. Caso o usuário não consiga perceber isso ele poderá recorrer às definições que são apresentadas no modelo, como demonstrado na Figura 2.

Figura 6 –Modelo aplicado à Função teste.



Com a observação dos Limites Laterais, restrição no domínio e a definição de assíntota vertical (THOMAS, p.112,2009) é possível concluir que a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical para $p(x)$. Já com a restrição na imagem e a definição de assíntota horizontal (STEWART, p.119,2010), tem-se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x} = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x-1}}{3x} = 0$, logo, a reta $y=0$ é uma assíntota horizontal para px .

Figura 7- Análise das respostas referentes às Assíntotas da Função teste.



É possível concluir, após responder todas as questões anteriores, que a Função $p(x)$ é descontínua em $x = 0$. Esse passo completa a atividade com essa Função e a partir daí o aluno pode começar nova tarefa com outra Função que seja de seu interesse ou do docente que esteja ministrando a aula. Para isso basta que o aluno clique no botão denominado “Estudar comportamento de outra função”, e a rotina será reiniciada.

Com esse exemplo todas as ferramentas utilizadas na modelagem e suas respectivas funcionalidades foram testadas. Os estudantes que testaram o modelo não encontraram dificuldades em manusear, responder e avançar as etapas. Por essa razão, entende-se que o modelo construído pode ser explorado com eficiência dentro e fora da sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção do modelo exige, obviamente, conhecimento aprofundado com respeito à lógica e às estruturas do *software* GeoGebra. Entretanto, o uso do modelo está ao alcance de todos, mas é preciso que o usuário tenha noções de Cálculo I para avançar nas questões propostas.

A ideia de preparar um modelo no estilo "*quiz*" surgiu da própria interação dos estudantes com o *software*, no intuito de tornar o estudo mais agradável. Porém, ao utilizar uma ferramenta tecnológica, como os *softwares* educacionais, o usuário deve entender que esta complementa o seu conhecimento, mas não pode substituí-lo, como se observa em (REZENDE, 2000).

Ao longo da pesquisa o conteúdo de Funções e Limites se mostrou bastante interessante para que se utilizasse a modelagem com o *software* GeoGebra. O sistema de perguntas e respostas desafia o aluno e produz uma expectativa de competitividade entre os próprios estudantes. O uso dessa ferramenta pode auxiliar tanto o estudante quanto o docente em sua prática pedagógica.

Trabalhos futuros pretendem testar o modelo, com os procedimentos e etapas didática francesa citada no texto, por meio de atividades desenvolvidas na disciplina Funções de Uma Variável no curso de Ciência e Tecnologia da UFVJM. Especialmente por se tratar de curso cuja disciplina costuma ter turmas bastante numerosas, exigindo diferentes estratégias pedagógicas de seus docentes, acredita-se que o resultado com o uso desse recurso deve ser bastante positivo.

Referências

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011, 353p. Disponível em: http://www.teses.ufc.br/tde_biblioteca/login.php. Acessado em 5 de outubro de 2015.

ALVES, F. R. V. & BORGES NETO. **Uma sequência de ensino para explorar a regra de L'Hospital com uso da tecnologia**. In: Educação Matemática e Pesquisa. v. 14, nº2, 1-31. 2012^a. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive>. Acessado em 18 de outubro de 2015.

ALVES, F. **Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura em Matemática**. In: Anais do V Seminário Internacional Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, p.1 21. 2012^b.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **Uma sequência de ensino para a aplicação do teste da Hessiana**. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012^c.

ALVES, Francisco Regis Vieira. **O papel do contra exemplo no ensino do cálculo: uma discussão com o uso do Geogebra**. In: Conferência Latinoamericana de Geogebra. p. 381-388. 2012^d.

ALVES, Francisco. R. V. **Exploração de noções topológicas na transição do Cálculo para a Análise Real com o Geogebra**. In: REVISTA DO INSTITUTO GEOGEBRA INTERNACIONAL DE SÃO PAULO, 1, P. CLXV-CLXXIX. 2012^e. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/indexx>. Acessado em 18 de outubro de 2015.

ARTIGUE, Michelle. **Ingénieriedidactique**. In: BRUN, J. *DidactiquesdesMathématiques*, Paris: DelachauxetNiestlé, 1996, p. 243-264.

ÁVILA, Geraldo; DE ARAÚJO, Luis Cláudio Lopes. **Cálculo-Ilustrado, Prático e Descomplicado**. 1ªedição. LTC, 2012.

BARUFI, Maria C. Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**.1999.195p. Tese - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BELTÃO, Terezinha Monica Sinício. **Uma análise da transposição didática externa com base no que propõem documentos oficiais para o ensino de gráficos estatísticos**. In; Revista paranaense de educação matemática, Paraná, v.1, n.1, jul-dez. 2012. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/864/pdf_80.Acessado em 15 de outubro de 2015.

CHEVALLARD, Y. **La TranspositionDidactique: Du SavoirSavantauSavoirEnsigné**. Grenoble, La penséeSauvage, 1991.

CRUZ, Maria Soraia Silva. **O uso da linguagem como ferramenta de acesso e apoio ao pensamento matemático**.VIDYA, v. 33, n. 1, p. 11, 2013.

CURY, H. Noronha. **Análise de erros em cálculo diferencial e integral: Resultados de investigações em cursos de Engenharia**. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. 2003.

DA SILVA, Rodrigo Sychocki; BARONE, Dante Augusto Couto; DE AZEVEDO BASSO, Marcus Vinicius. **O uso do Geogebra como ferramenta para a construção de conceitos matemáticos: um primeiro estudo envolvendo Cadeias de Markov**. RENOTE, v. 12, n. 1. 2014.

FERRUZZI, Elaine Cristina et al. **A Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia**. 2003. 161p. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FROTA, Maria Clara Rezende. **O Pensar Matemático no Ensino Superior: concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos**. 2002. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2002.

FROTA, Maria Clara Resende. **Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de Cálculo**. Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, p. 89-121, 2001.

GUIDORIZZI, Hamilton. L. **Um curso de Cálculo**, v. 1, 5ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2010.

JARDIM, D.F., et al. **Construção do perfil dos acadêmicos retidos e evadidos em disciplina de matemática do BC&T-TO**. In: SINTEGRA, v.1, p.804, 2012a, UFVJM, Anais do I Sintegra, Diamantina- MG. Disponível em: http://sintegra.ufvjm.edu.br/arquivos/docs/Anais_SINTEGRA_2012.pdf. Acessado em 19 de outubro de 2015.

JARDIM, D.F., et al. **Softwares matemáticos na construção de novos perfis sócio- educacionais**. In: SINTEGRA, v.1, p.422, 2012b, UFVJM, Anais do I Sintegra, Diamantina- MG, Disponível em: http://sintegra.ufvjm.edu.br/arquivos/docs/Anais_SINTEGRA_2012.pdf. Acessado em 19 de outubro de 2015.

JARDIM, D.F., et al. **Análise do impacto do uso do Máxima no ensino de disciplina de Álgebra Linear do BC&T-TO**. In: SINTEGRA, v.1, p.669, 2012c, UFVJM, Anais do I Sintegra, Diamantina-MG. Disponível em: http://sintegra.ufvjm.edu.br/arquivos/docs/Anais_SINTEGRA_2012.pdf.

edu.br/arquivos/docs/Anais_SINTEGRA_2012.pdf. Acessado em 19 de outubro de 2015.

LELES, Tabata Chaves Fagundes. **As estratégias didáticas abordadas para o ensino de semelhança de triângulo em alguns livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Fundamental**. Belo Horizonte, 2013. 50p.

MARIANI, Vanessa. **Utilização do software Maple no ensino-aprendizagem de cálculo**. Brasília, 2010. 12p.

MORAES, Carolina Roberta; VARELA, Simone. **Motivação do aluno durante o processo de ensino-aprendizagem**. Revista eletrônica de educação, v. 1, p. 1-15, 2007.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, E. Sidney. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra**. 2013. Ciência & Natura, Santa Maria, v 37 Ed Especial PROFMAT, p. 156-178.

NASSER, Lílian. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo**. ENCONTRONACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), v. 9, p. 1-14, 2007.

NETO, JPS. **Um estudo sobre o ensino de limites: um tratamento computacional com aplicações**. 2006. 123p. Dissertação de Mestrado- PUC - SP, São Paulo, 2006.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468p. Tese de Doutorado- Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROCHA, Marcos Dias da. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação**. 2010.

172p.Dissertação de Mestrado- Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

SOBRINHO, J.C; DECHECHI, E.C; DETONI, M.M.**Dificuldades conceituais em matemática básica de ingressantes no curso de engenharia de produção agroindustrial.** Anais COBENGE-2005. Campina Grande, 2005. Disponível em:<http://www.abenge.org.br/CoubengeAnteriores/2005/artigos/PR-5-43002897949-1118675861553.pdf>. Acesso 15 de outubro de 2015.

SOUSA, Giselle Costa de; AMORIM, Frank Victor; SALAZAR, Jesus Victoria. **Atividades Com Geogebra Para O Ensino De Cálculo (TA).** In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2011.

STEWART, James. **Cálculo.**v. 1, 6ª edição, São Paulo: Thompson, 2010.

THOMAS, George B. **Cálculo**, v.1, 11ª Ed.,São Paulo, 2009.

UFVJM. **Projeto Pedagógico deCurso -Bacharelado em Ciência e Tecnologia**– Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. *Campusdo Mucuri.* Teófilo Otoni,2012. Disponível em:<http://www.ufvjm.edu.br/prograd/projetos-pedagogicos.htm>.Acessado em 19 de outubro de 2015.

VIANA, MargerC.V.**Vale utilizar Softwares no ensino de cálculo?**. In: II HTEM Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2004, Rio de Janeiro – RJ. Anais do Segundo Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2004.p. 131-13.

Texto científico recebido em: 07/10/2015

Processo de Avaliação por Pares: (*Blind Review* - Análise do Texto Anônimo)

Publicado na Revista Vozes dos Vales - www.ufvjm.edu.br/vozes em: 24/11/2015

Revista Científica Vozes dos Vales - UFVJM - Minas Gerais - Brasil

www.ufvjm.edu.br/vozes

www.facebook.com/revistavozesdosvales

UFVJM: 120.2.095-2011 - QUALIS/CAPES - LATINDEX: 22524 - ISSN: 2238-6424

Periódico Científico Eletrônico divulgado nos programas brasileiros *Stricto Sensu*

(Mestrados e Doutorados) e em universidades de 38 países,
em diversas áreas do conhecimento.