Ministério da Educação – Brasil
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM
Minas Gerais – Brasil
Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas
Reg.: 120.2.095 – 2011 – UFVJM
ISSN: 2238-6424
QUALIS/CAPES – LATINDEX
Nº. 10 – Ano V – 10/2016
http://www.ufvjm.edu.br/vozes

Estudos de Modelos de Equações Diferenciais para Deflexão de Vigas

Profª. Drª. Jaqueline Maria da Silva
Doutora em Modelagem Computacional pelo Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC
Docente do Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia – ICET da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM
Minas Gerais - Brasil
http://lattes.cnpq.br/4343491423219191
E-mail: jaqueline.silva@ufvjm.edu.br

Luara Achtschin Godinho
Discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia - UFVJM
http://lattes.cnpq.br/5389441374606723
E-mail: luaraagodinho@hotmail.com

Phillipe Luz de Moraes
Discente do Bacharelado em Ciência e Tecnologia - UFVJM
http://lattes.cnpq.br/7776847848749655
E-mail: phillipe_luz@hotmail.com

Resumo: Este estudo foi realizado através da aplicação e implementação de modelos matemáticos, com o auxílio de *softwares* como o *Wolfram* e *FTool*. Com o auxílio do Cálculo Diferencial, utilizando o Teorema de Laplace e o método de Variáveis Separáveis, foram analisados modelos para deflexão máxima em casos de vigas bi apoiadas, engastadas e em balanço. Comparando os resultados obtidos com o uso de *softwares* observou-se que os valores encontrados são bastante similares. Os métodos apresentados foram eficazes e práticos, reafirmando a necessidade de que sejam usados como método de solução de problemas relacionados à deflexão de vigas. Tais métodos são importantes para facilitar o entendimento na área que diz respeito à análise de estruturas, colocando o

estudante frente a problemas práticos da realidade profissional e o capacitando a solucioná-los.

Palavras-chave: Deflexão de vigas. Equações Diferenciais. *FTool*. *Wolfram*. Modelagem matemática.

Introdução

No ramo da engenharia civil que engloba a concepção de construção e manutenção de variados tipos de infraestrutura, além do notório cuidado com o meio ambiente, percebe-se uma maior relevância de certas disciplinas que a fundamentam, tais como o Cálculo Diferencial e a Física Mecânica.

Uma das aplicações desses conteúdos se encontra na área de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas. Embora o uso e o domínio do Cálculo Diferencial (JARDIM et all, 2015) seja de extrema importância, percebe-se que no ensino superior atual não é presente, no raciocínio do discente, nem na maioria dos livros didáticos, o emprego de conhecimentos práticos, mas certamente eficazes.

Muitos discentes durante a graduação enfrentam grande dificuldade ao se depararem com a aplicação de conceitos básicos necessários para a análise de diversas estruturas, como pontes, vigas e pilares. No caso das vigas, um importante estudo está relacionado com a deflexão, que por definição representa uma alteração ou desvio da posição natural para um dos lados.

Segundo (RIOS, 1999) a viga é um elemento estrutural de ferro, concreto armado ou madeira, grosso e longo, para construções. Está sujeita à cargas transversais e é responsável por transmitir o peso das lajes e dos demais elementos, como paredes e portas, às colunas. “Devido às cargas aplicadas às vigas, as mesmas sofrem não só tensões normais e de cisalhamento, mas também deslocamentos lineares dos pontos dos eixos das barras.” (CÉSAR, [ca.2010], p.1)

Ainda, de acordo com Sarturi (2014, p.22):

> Apesar da utilização de materiais de grande controle tecnológico e resistência, os processos que ocorrem na natureza, como variação de temperatura, radiação solar e muitos outros, aliados a fatores como acidentes, uso inadequado ou mesmo o envelhecimento natural do material, provocam o processo conhecido como deterioração estrutural [...] que gera diminuição da resistência da estrutura, podendo levar a situações extremas [...]. (SARTURI, 2014, p.22)

Para facilitar o estudo de tais deslocamentos este estudo propõe o uso de modelos matemáticos associados à modelagem computacional, o que permitirá uma melhor visualização, assim como uma melhor compreensão dos comportamentos de certos materiais estudados em engenharia estrutural, aperfeiçoando as relações de custo-benefício da obra, evitando desperdícios, desgastes e acidentes desnecessários.

Este estudo foi realizado usando *softwares* em modelos matemáticos, mostrando como construí-los e elaborá-los através do uso de conceitos básicos de Cálculo Diferencial. O *software* Wolfram foi usado como ferramenta computacional e o FTool foi utilizado para a criação de gráficos e diagramas.

Modelo

A deflexão estática $y(x)$ de uma viga uniforme de comprimento L suportando uma carga $q(x)$ por unidade de comprimento satisfaz a equação de quarta ordem:

$$EI\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^4} = q(x) \tag{1}$$

Onde:

E é o módulo de elasticidade de Young;

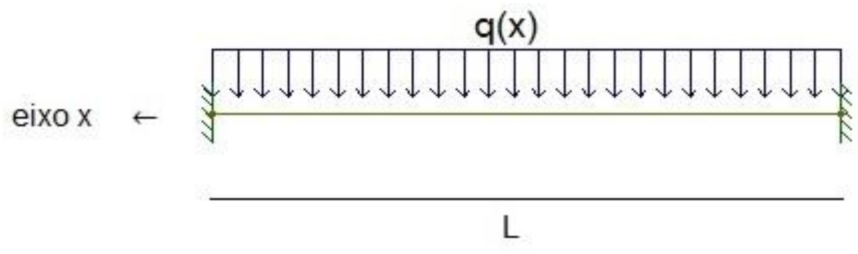
I é um momento de inércia de uma seção transversal da viga; (ZILL & CULLEN, 2001, p.28)

Viga engastada em ambas as extremidades

Para (LEET et all, 2010) vigas engastadas são hiperestáticas e não possuem muitas aplicações, sendo mais comumente vistas em estruturas metálicas. Apesar da maioria dos casos serem de vigas hiperestáticas, as engastadas em ambos os lados são pouco utilizadas e tem como característica uma enorme causa de esforço interno, principalmente ao dilatar devido a alterações climáticas, podendo sofrer rachaduras danificando as obras.

A Figura 1 apresenta um exemplo de uma viga engastada em ambas extremidades e com carga $q(x)$ uniformemente distribuída em todo o seu comprimento L. Neste caso, a deflexão $y(x)$ satisfaz a Equação (1) e pode-se deduzir as seguintes condições de contorno:

Figura 1 – Viga engastada com carga uniformemente distribuída



$$y(0) = 0 \,;\, y(L) = (0) \,;\, y'(0) = 0 \,;\, y'(L) = 0.$$

Usando as condições de contorno acima, observa-se que, como está engastada em ambos os lados, não haverá movimento e nem variação de movimento. Logo, $y(0)$, $y(L)$ e suas respectivas derivadas serão nulos. Aplicando a transformada de Laplace na Equação (1) encontra-se:

$$\mathrm{EI}(s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0)) = \frac{q(x)}{s}$$

Analisando as condições de contorno para $y(0)$ e $y'(0)$, pode-se concluir:

$$s^4 Y(s) - s y''(0) - y'''(0)) = \frac{q(x)}{EIs} \qquad (2)$$

Dividindo toda a função por s^4, e considerando $y''(0) = A$ e $y'''(0) = B$, então:

$$Y(s) = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} + \frac{q(x)}{EIs^5} \qquad (3)$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, obtém-se a função em termos de x:

$$y(x) = \frac{A}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} + \frac{B}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} + \frac{q(x)}{4!EI}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$= \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{6}x^3 + \frac{q(x)}{24EI}\ x^4 \qquad (4)$$

Pelas condições de $y(L) = 0$ e $y'(L) = 0$, a última equação conduz ao sistema:

$$\frac{A}{2}L^2 + \frac{B}{6}L^3 + \frac{q(x)}{24EI}L^4 = 0$$

$$AL + \frac{B}{2}L^2 + \frac{q(x)}{6EI}L^3 = 0$$

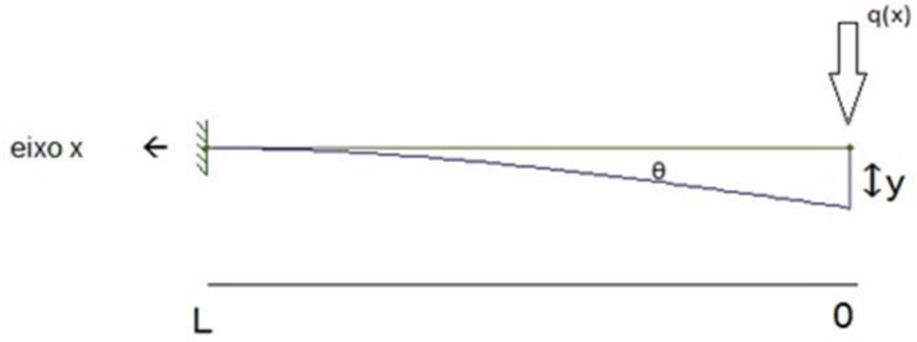
Ao resolvê-lo, encontra-se $A = \frac{q(x)L^2}{12EI}$ e $B = -\frac{q(x)L}{2EI}$. Logo, a função correspondente a deflexão sofrida pela viga é dada por

$$y(x) = \frac{q(x)L^2}{24EI}x^2 - \frac{q(x)L}{12EI}x^3 + \frac{q(x)}{24EI}x^4 \qquad (5)$$

Viga em balanço

A viga em balanço (ver Figura 2) é uma viga de edificação “[...] engastada em uma extremidade e livre na outra” (HIBBELER, 2004, p.199). Toda a carga recebida é transmitida a um único ponto de fixação. É amplamente utilizada em diversas aplicações como varandas, calçadas, telhados e em construções mais notórias como a Catedral de Brasília.

Figura 2 – Viga em balanço



Considerando o ponto de engaste como L e a extremidade em balanço da viga como ponto 0, obtemos as condições de contorno:

Condição de contorno 1: $y'(L) = 0$.

Condição de contorno 2: $y(L) = 0$.

Durante os processos de integração, usa-se as condições de contornos já definidas para encontrar as constantes.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = q(x) \qquad (6)$$

Realizando a 1ª integração em função de x da Equação (6):

$$EI\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int qxdx$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{qx^2}{2} + C_1 \qquad (7)$$

Utilizando a primeira condição de contorno para encontrar C_1:

$y'(L) = 0$, logo, quando $x = L$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

$$0 = \frac{qL^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^2}{2}$$

Substituindo a constante na Equação (7), obtêm-se a expressão, que caracteriza a declividade sofrida pela viga:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qL^2}{2} \tag{8}$$

Realizando a 2ª integração em função de x da Equação (8), obtêm-se:

$$EIy = \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^2x}{2} + C_2 \tag{9}$$

Encontrando C_2 utilizando a segunda condição de contorno definida: $y(L) = 0$, logo ,quando $x = L, y = 0$.

$$0 = \frac{qL^3}{6} - \frac{qL^3}{2} + C_2$$

Portanto,

$$C_2 = \frac{qL^3}{3}$$

Substituindo a nova constante na Equação (9), obtêm-se a expressão para a deflexão máxima:

$$EIy = \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^2x}{2} + \frac{qL^3}{3} \tag{10}$$

Pela teoria linear, a flecha y e a declividade $\frac{dy}{dx}$, assim como o ângulo causado na deflexão, são expressas por (11) e (12), respectivamente:

$$y = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{L^2x}{2} + \frac{L^3}{3}\right) \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right), \text{ e também } \theta = arctg\left[\frac{q}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right)\right] \tag{12}$$

Vigas bi apoiadas

As vigas bi apoiadas ou simplesmente apoiadas são aquelas com dois apoios, que podem ser simples e/ou engastados. Estão entre as estruturas mais simples e comuns nas aplicações em problemas de engenharia. Seu comportamento dinâmico não-linear é bem conhecido e a maioria dos estudos de vibrações não-lineares em vigas trata daquelas simplesmente apoiadas, já que as vigas sob essas condições de contorno apresentam soluções lineares e não-lineares de forma e tratamento mais simples que aquelas com outros tipos de apoio.

Pode-se encontrar tais vigas em pontes e longarinas, assim como automóveis e construções em geral. Algumas bastante conhecidas como o Museu de Arte de São Paulo, o MASP, com um vão de mais de 70 metros estendido sobre 4 pilares (MASP, 2016)[1]. Existem famosos projetos como a Ponte Chacao no Chile que com seus 2750 metros de extensão, terá um vão de mais de 1000 metros entre seus pilares. Embora prevista para 2020, essa ponte com certeza é um exemplo claro de vigas bi apoiadas sendo utilizadas ao extremo e com perfeição (LOUZAS, 2014).

Abaixo segue a dedução das equações de deflexão máxima, também chamada de flecha, numa viga isostática com carregamento $q(x)$ uniformemente distribuído de comprimento L.

Figura 3 – Diagrama da força q(x)

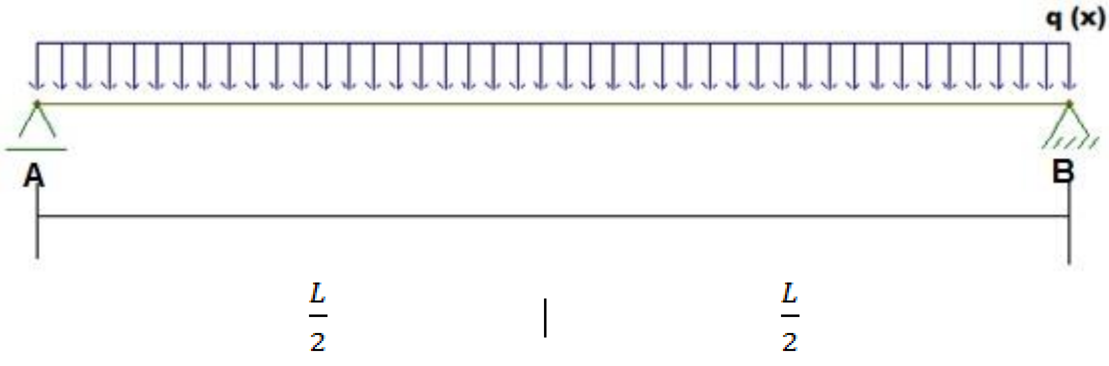
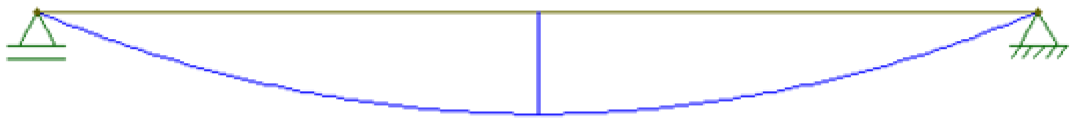


Figura 4 – Diagrama de Momento [M(x)]

[1] Sobre o Masp: histórico. (s.d.). Museu de Arte de São Paulo. Disponível em: < http://masp.art.br/masp2010/sobre_masp_historico.php>. Acesso em: 11 set. 2016.



$$M(x) = \frac{ql^2}{8}$$

Figura 5 – Diagrama de uma força concentrada, P=1kN

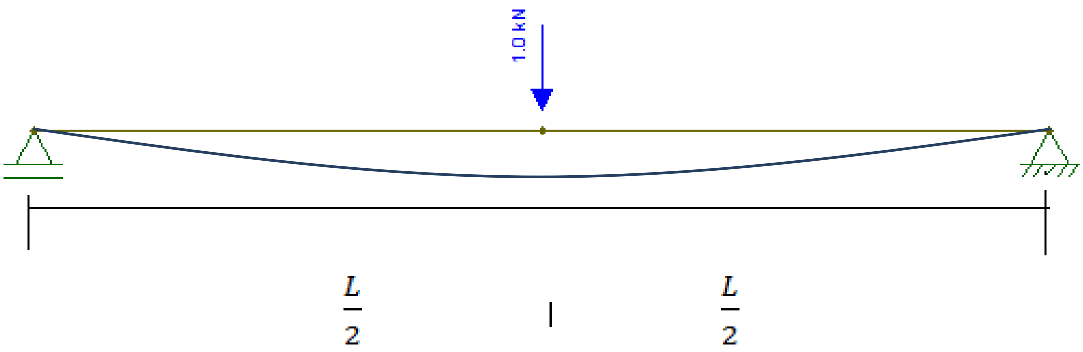
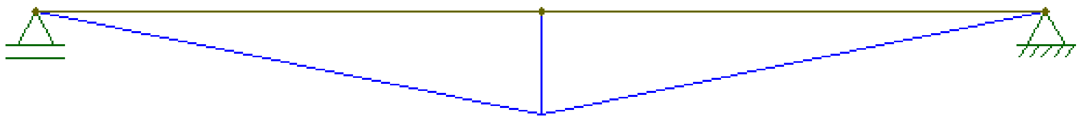


Figura 6 – Diagrama de momento [m(x)]



$$m(x) = \frac{Pl}{4}$$

A curva formada no diagrama de força $q(x)$ é chamada de flecha (Figura 3), e representa a deformação sofrida pela viga ao receber influências de forças externas (LEET et al., 2010). O comprimento L foi dividido em 2 para especificar o vértice da curva e o centro da viga. É nesse ponto que se encontra a flecha máxima, ou seja, a maior deflexão sofrida pela viga por uma força qualquer.

A curva do diagrama de momento (Figura 4) é uma função de segundo grau descrita por $M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$, e o momento quando $x = \frac{L}{2}$ (deformação máxima da flecha) é $\frac{qL^2}{8}$. No diagrama de momento da força concentrada (Figura 6), observa-se uma única força no centro, então é fácil de presumir que o gráfico será formado por retas lineares. Logo, a função de primeiro grau será determinada por intervalos, para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, temos que $m(x) = \frac{Px}{2}$. E para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$, tem-se $m(x) = \frac{Px}{2} + \frac{PL}{2}$.

Novamente o ponto máximo da deformação será em $\frac{L}{2}$ e o momento máximo $\mathrm{m(x)}$ será $\frac{PL}{4}$. Neste caso a força é $\mathrm{P = 1kN}$. Assumindo $\mathrm{We = Wi}$:

$$Py = \int_0^L \left(\frac{M(x)m(x)}{EI}\right) dx \tag{13}$$

Para facilitar os cálculos divide-se o intervalo em dois, obtendo assim uma integral com o intervalo de 0 até $\frac{L}{2}$. Com o intuito de balancear o resultado, multiplicar-se a nova integral por 2:

$$Py = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{M(x)m(x)}{EI}\right) dx \tag{14}$$

Onde $'P'$é a força de valor unitário, ‘y’ é o deslocamento da flecha a ser encontrado, $M(x)$ e $m(x)$ são as funções de momento já mencionadas, o ‘E’ corresponde a elasticidade do material da viga, e o ‘I’ é o momento de inércia. Nesse caso genérico, tanto o ‘E’ quanto o ‘I’ serão considerados constantes. Retirando as constantes da integral:

$$EIy = 2\int_0^{\frac{L}{2}} M(x)m(x)dx$$

Substituindo as equações de momento:

$$EIy = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{qxL}{2} - \frac{qxL^2}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Resolvendo a Integral definida:

$$EIy = 2\left[\frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{16}\right] \text{ (No intervalo de 0 até } \frac{L}{2}\text{)}$$

Aplicando o intervalo na variável e simplificando o ‘2’:

$$EIy = \frac{ql^4}{48} - \frac{ql^4}{128}$$

Realizando o mínimo múltiplo comum e isolando o 'y', obtemos:

$$y(\max) = \frac{5qL^4}{384EI} \qquad (15)$$

A Equação (15) é a equação geral para o cálculo de flecha máxima numa viga isostática e bi apoiada.

Metodologia

Utilizando as equações de momento e deflexão apresentadas na seção anterior, determina-se a deflexão máxima de uma viga bi apoiada com os seguintes dados apresentados na Tabela 1:

Tabela 1 – Dados da viga Bi apoiada

Tipo de apoio	Bi apoiada
Tipo de carga	Carga distribuída
Valor da carga (q)	$11{,}3\ \frac{N}{m}$
Comprimento da Viga (L)	$1{,}2\ m$
Módulo de Young (E)	$207\ GPa$
Seção transversal	Viga em I
Altura da seção	$0{,}0508\ m$
Largura da seção	$0{,}0127\ m$
Altura da parte interior	$0{,}0457\ m$
Espessura interior	$0{,}0025\ m$
Inércia de momento	$5{,}7935\ x\ 10^{-8}\ m^4$

Fonte: Dados obtidos no Wolfram

O material que compõe a viga é aço, como representado pelo Módulo de Elasticidade de Young (E) (HIBBELER, 2004). Analisando a Figura (3), pode-se efetuar os cálculos de reações de apoio dos eixos. Para isso, é preciso estabelecer os pontos de referência e os eixos. Considerando a distância do ponto A ao ponto B como L, o eixo cartesiano X nessa mesma horizontal, e o eixo Y na vertical perpendicular a viga, pode-se estabelecer algumas condições de contorno que serão úteis na dedução das equações.

Para calcular as reações de apoio, analisa-se o comportamento das forças e cargas na viga. Tem-se uma carga distribuída $\mathrm{q(x)}$ voltada para baixo, então optar-se por definir o referencial negativo para baixo, em direção ao movimento de deflexão da viga. Nos pontos A e B, os apoios se comportam de maneira contrária a carga $\mathrm{q(x)}$, aplicando uma força para cima, ou seja, sentido positivo do referencial. O referencial do momento será assumido como positivo para o sentido anti-horário. Assim pode-se esboçar a equação das forças resultantes em Y:

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - qL = 0 \tag{16}$$

$$\sum M_a = 0$$

$$B_y L - qL\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \tag{17}$$

Logo,

$$B_y = \frac{qL}{2} \text{ e } A_y = \frac{qL}{2}$$

Que correspondem as equações das reações de apoio nos pontos A e B. Pela equação (1) pode-se obter, as funções correspondentes ao cortante (V), ao momento (M), a inclinação $\frac{dy}{dx}$, e a deflexão y. Integrando uma vez, obtêm-se o cortante V:

$$V(x) = \frac{qL}{2} - qx \tag{18}$$

A partir da segunda integral, encontra-se a equação do momento em vigas bi apoiadas:

$$M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \tag{19}$$

Pode-se estabelecer condições de contorno nos pontos A e B para analisar a partir da equação de momento, pois o próximo passo será determinar a inclinação fornecida pela razão entre a variação de y pela variação de x. Considerando A como o ponto inicial, temos que em A, $\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} = 0$. E em B,$\mathrm{x} = \mathrm{L}$, $\mathrm{y} = 0$. Ao integrar pela terceira e quarta vez, obtêm-se duas constantes desconhecidas que serão encontradas utilizando a condição de contorno mencionada:

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \tag{20}$$

$$EIy = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qLx^4}{24} + C_1x + C_2 \tag{21}$$

Em A, $\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} = 0$., obtemos que $C_2 = 0$.

Em B, $\mathrm{x} = \mathrm{L}$, $\mathrm{y} = 0$., obtemos que $C_1 = -\frac{qL^3}{24}$.

Assim a inclinação e a deflexão são representadas pelas seguintes funções:

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI} \tag{22}$$

$$y = \frac{qLx^3}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qLx^3}{24EI} \tag{23}$$

Resultados

Através das fórmulas deduzidas pode-se determinar de forma simples e precisa o comportamento de diversos tipos de viga sob a ação uma carga. Na Tabela (1) estão descritas as informações de um exemplo aplicado. O exemplo em questão diz respeito a uma viga em $'I'$ feita de aço. Para cada material as constantes do módulo de elasticidade de Young (E) e do momento de inércia (I) assumem valores diferentes.

Utilizando a Equação (15) para o cálculo da deflexão máxima, a partir dos valores inseridos na Tabela 1, encontra-se a seguinte expressão:

$$y(\mathrm{max}) = \frac{5(11{,}3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}})(1{,}2\,\mathrm{m})^4}{384(2{,}07\,x\,10^{11}\frac{N}{m^2})(5{,}7935\,x\,10^{-8}m^4)}$$

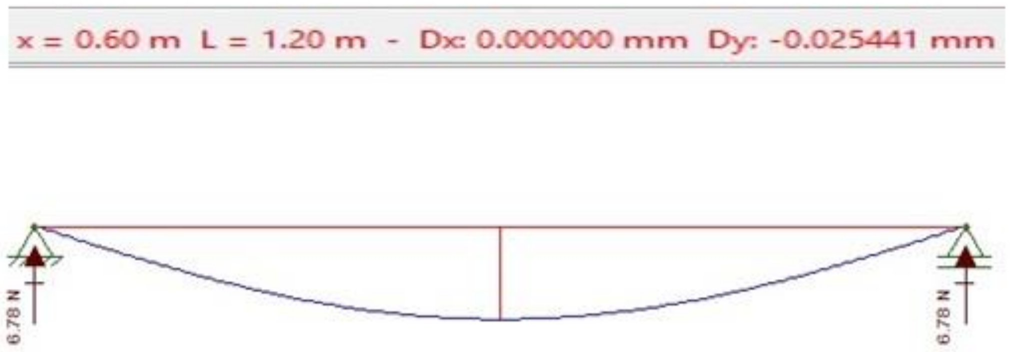
$$y(max) = 2{,}544\,x\,10^{-5}\,m$$

$$ou$$

$$y(max) = 0{,}02544\,mm$$

Por ser uma carga distribuída uniformemente ao longo da viga (ver Figura 7), o valor de x em que essa deformação máxima ocorrerá será em $\frac{L}{2} = 0{,}60\,m$. O diagrama abaixo gerado pelo Ftool demonstra a exatidão do cálculo e o comportamento da deflexão:

Figura 7 – Flecha máxima pelo Ftool



Como falado anteriormente, em muitas aplicações da engenharia, é necessário analisar e compreender o comportamento dos materiais utilizados e estudados. Com estes dados e *softwares* adequados, é possível um dimensionamento correto e uma escolha adequada do material para uma construção. Neste trabalho foi possível determinar a deflexão ao longo de um eixo, facilitando a compreensão do comportamento da viga bi apoiada. Os programas utilizados, como o Ftool e o Wolfram, são de extrema importância para determinar as equações e diagramas necessários para a resolução dos problemas, favorecendo uma exatidão no cálculo e na obtenção dos resultados.

Referências

CAMPOS, Alessandro Torres; FARIAS, Carlos Vasconcelos. *Reflexões sobre o ensino de Engenharia no Brasil*. Mimesis, Bauru, v., 20, n. 2, 39-57, 1999.

CÉSAR, Christian. *Deflexão de Vigas Método da Integração Direta.* São Paulo: UNISANTOS, *[ca.2010].* Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfrwwAF/deflexao-vigas-metodo-integracao-direta>. Acesso em: 09 set. 2016.

FLEMMING, Diva M.; LUZ, Elisa F.; WAGNER, Robson. *Equações Diferenciais na Engenharia Civil: uma proposta didática*. Palhoça: UNISUL – Universidade do Sul de Santa Catarina. NEEM – Núcleo de Estudos em Educação Matemática, Palhoça – SC.

GAMA, Erica Dantas Pereira; MENEZES, Lucas da Mata Rocha. *Equações diferencias aplicadas a flexão de vigas*. Disponível em: http://pt.slideshare.net/lucass_menezes/equaes-diferenciais-aplicada-flexao-de-vigas. Acesso em: 25 jun. 2016.

GONÇALVES, Ivan Henrique. *Análise de Deformações em Vigas com Comportamento Geometricamente Não-linear*. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2006.

GOULART, Guilherme Ribeiro; OLIVEIRA, Guilherme Azevedo; PROENÇA, Anderson Ramos. *Métodos de determinação de deflexão flexional e inclinação: Aplicação em viga escalonada*. Minas Gerais, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade De Engenharia Mecânica, 2010.

HIBBELER, R.C. *Resistência dos materiais*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

JARDIM, D. F., SILVA, J. M., PEREIRA, M. M., SOARES JUNIOR, E. A., NEPOMUCEMA, T. V., PINHEIRO, T. R. Estudando limites com o Geogebra. Revista Científica Vozes dos Vales. N. 08. 2015.

LEET, Keneth M; UANG Chia-Ming; GILBERT Anne M. *Fundamentos da análise estrutural.* 3ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

LOBO, Roberto. *Para que devem ser formados os novos engenheiros?*. São Paulo, 2012. Disponível em: http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,artigo-para-que-devem-ser-formados-os-novos-engenheiros,838027. Acesso em: 24 jun. 2016.

LOUZAS, Rodrigo. *Autorizada a construção da maior ponte pênsil da América Latina*. São Paulo, 2014.

RIOS, Dermival Ribeiro. *Novo minidicionário escolar da língua portuguesa.* 2001. São Paulo: DCL,1999.

ROCHA, Gabriel Gomes. *Solução Analítica de um problema de deflexão de viga comparada com o método de Elementos Finitos Unidimensional*. Rio Grande do Sul, Faculdade de Matemática PUCRS, 2014.

SARTURI, Francis Diego Moretto. *Simulação computacional de estruturas de concreto reforçadas com aço e compósitos de fibra de carbono.* Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Mecânica Computacional da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

Sobre o Masp: histórico. (s.d). Museu de Arte de São Paulo. Disponível em: < http://masp.art.br/masp2010/sobre_masp_historico.php>. Acesso em: 11 set. 2016.

THOMAS, Lucas Rangel. *O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros*. Brasília: Universidade de Brasília, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade de Brasília -Faculdade UnB Planaltina, 2013.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais*, vol. 1. 3ª ed. São Paulo, 2001.

Processo de Avaliação por Pares: (*Blind Review* - Análise do Texto Anônimo)

Publicado na Revista Vozes dos Vales - www.ufvjm.edu.br/vozes em: 10/10/2016

Revista Científica Vozes dos Vales - UFVJM - Minas Gerais - Brasil

www.ufvjm.edu.br/vozes

www.facebook.com/revistavozesdosvales

UFVJM: 120.2.095-2011 - QUALIS/CAPES - LATINDEX: 22524 - ISSN: 2238-6424

Periódico Científico Eletrônico divulgado nos programas brasileiros *Stricto Sensu*

(Mestrados e Doutorados) e em universidades de 38 países,

em diversas áreas do conhecimento.