



Ministério da Educação – Brasil  
Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM  
Minas Gerais – Brasil  
Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas  
Reg.: 120.2.095 – 2011 – UFVJM  
ISSN: 2238-6424  
QUALIS/CAPES – LATINDEX  
Nº. 12 – Ano VI – 10/2017  
<http://www.ufvjm.edu.br/vozes>

## **Um estudo acerca da medida da aceleração da gravidade no *campus* da UFVJM em Teófilo Otoni**

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Deborah Faragó Jardim  
Doutora em Física pela Universidade Federal do Espírito Santo  
Docente da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/7626923298872191>  
E-mail: [deborah.farago@ufvjm.edu.br](mailto:deborah.farago@ufvjm.edu.br)

Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito  
Doutor em Física pela Universidade Federal de Minas Gerais  
Docente da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/6555493393643522>  
E-mail: [alexandre.faissal@ufvjm.edu.br](mailto:alexandre.faissal@ufvjm.edu.br)

Carolina Tanure Martins  
Discente do curso de Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/5680543923381948>  
E-mail: [caroltanure01@gmail.com](mailto:caroltanure01@gmail.com)

Iany Barbosa Neumann  
Discente do curso de Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/1252243421767741>  
E-mail: [ianyneumann21@gmail.com](mailto:ianyneumann21@gmail.com)

Lorena Lehmann Alves  
Discente do curso de Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/0876583298490272>  
E-mail: [lorenalehmann.ufvjm@gmail.com](mailto:lorenalehmann.ufvjm@gmail.com)

Valfrido de Novais Santos  
Discente do curso de Ciência e Tecnologia - UFVJM  
<http://lattes.cnpq.br/7271840365333116>  
E-mail: [novaisufvjm@gmail.com](mailto:novaisufvjm@gmail.com)

**Resumo:** O presente artigo é parte de um projeto de pesquisa que busca utilizar os recursos computacionais no ensino, através do uso de softwares livres, com o objetivo de melhorar a qualidade da aprendizagem nas disciplinas de Física e Matemática. Foram utilizados um pêndulo simples e câmeras filmadoras para medir a aceleração da gravidade local através da análise das imagens, por meio de um software livre denominado Tracker. Foi analisado o efeito das perdas nas oscilações para pequenos e grandes comprimentos do fio bem como a confiabilidade da medida. Os resultados obtidos foram muito bons, apresentando uma diferença relativa de 0,28% em comparação com o valor teórico para a região, para um conjunto de dados, e de 0,68% para o outro caso. Discutiu-se o limite de validade do modelo teórico ajustado e os erros nas medidas foram estimados e analisados, sempre com o intuito de estimular o raciocínio e contribuir com a aprendizagem dos estudantes. O software livre Maxima foi utilizado para auxiliar no procedimento da análise da aproximação do pêndulo ao caso linear.

**Palavras-chave:** Tracker, Maxima, software livre, pêndulo simples, aceleração gravitacional.

## 1. Introdução

O *campus* Mucuri, instalado na cidade de Teófilo Otoni-MG, integra a Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) cuja sede se encontra em Diamantina. Em especial, o curso de Ciência e Tecnologia (C&T), que tem duração de 3 anos (seis semestres) prevista em seu projeto pedagógico, oferece 240 vagas a cada ano. O estudante, após concluir o bacharelado em Ciência e Tecnologia, se desejar continuar os estudos na Instituição, pode escolher entre as engenharias do próprio *campus*, ou nos outros *campi* da UFVJM que ficam em Janaúba, Unaí e Diamantina. O tempo para integralização após a transição para a engenharia é de dois anos, conforme as propostas pedagógicas dos cursos. Entretanto, nem todos os alunos conseguem concluir a engenharia no prazo de 5 anos. Alguns simplesmente abandonam o curso e a universidade e outros repetem diversas vezes as mesmas disciplinas, criando uma espécie de bloqueio e adquirindo uma baixa autoestima que implica em novos problemas, podendo atingir a vida profissional futura.

Diversos fatores podem contribuir com as taxas elevadas de retenção e

evasão no curso de C&T e nas engenharias, mas não está no escopo deste texto discutir essa questão. Entretanto, o alto índice de reprovação na unidade curricular Fenômenos Mecânicos, conhecida por Física I na maior parte das instituições de ensino superior, foi o motivo pelo qual este trabalho se desenvolveu, bem como outras atividades similares. A limitação do laboratório de ensino de Física I, no que se refere ao número reduzido de materiais didáticos ou à qualidade desses kits para obtenção de bons resultados, acabou tornando as atividades desmotivadoras para os discentes e mesmo para os docentes.

A experiência na docência mostra que as discussões teóricas mais aprofundadas em sala de aula podem estimular os discentes na busca de atividades que proporcionem o entendimento de certos conteúdos, sejam elas de modelagem computacional (JARDIM et al., 2017) ou de práticas experimentais em laboratório. O confronto entre experimentos reais e modelos teóricos fascina os alunos, motiva seus estudos, melhora a qualidade da aula do professor e diminui o abismo que muitas vezes existe entre o ensino e a aprendizagem, e entre o docente e o discente.

A atividade apresentada aqui teve seu início durante uma discussão em sala de aula acerca da aceleração da gravidade local. Alguns estudantes disseram que, por ser a cidade de Teófilo Otoni formada por montanhas e diferentes tipos de solos e rochas, a medida da aceleração da gravidade ( $g$ ) sofreria alterações. Outros sugeriram que o valor de  $g$  dependeria da localização na superfície terrestre. Esses comentários levaram a pesquisas sobre o estudo da gravimetria para identificar com que precisão se deveria medir  $g$  para que qualquer desvio pudesse ser observado. Entretanto, as atividades experimentais precisariam ser realizadas utilizando-se materiais de baixo custo e qualquer efeito no valor de  $g$  que necessitasse de alta precisão na medida para ser avaliado tornaria a atividade impraticável pela estrutura limitada do laboratório e pela falta de recursos financeiros. Apesar disso, a realização de atividades experimentais capazes de estimar a gravidade local com uma precisão melhor que a atividade padrão realizada nos laboratórios didáticos mais simples, que utiliza cronômetros na medida do tempo, como sugere Lopes (1998), já seria uma motivação, especialmente se fosse utilizado algum tipo de recurso tecnológico acessível.

Muitos alunos chegam à universidade sem saber que a aceleração da gravidade não é uma constante. Pode-se atribuir parte dessa responsabilidade aos currículos das escolas e à falta de professor com formação em física nas salas de aula no ensino médio, fazendo com que muitos assuntos, como neste caso, não sejam abordados em aula. Em geral os professores acabam focando na resolução de problemas que utilizam o valor de  $g$  como sendo  $9,81 \text{ m/s}^2$  sempre, por vezes adotando o valor arredondado de  $10 \text{ m/s}^2$ , mas ainda sendo constante, e não discutindo a questão da variação de  $g$ .

Com este trabalho, já durante as pesquisas bibliográficas, os alunos entenderam que a aceleração da gravidade é uma medida local, já que seu valor depende de alguns fatores, como altitude e latitude<sup>1</sup>. Em Lopes (2008) é apresentada uma tabela com os valores da aceleração da gravidade para diferentes altitudes e latitudes. Considerando que o *campus* da UFVJM, onde os experimentos foram realizados, encontra-se numa altitude aproximada de 350m e latitude de  $17^\circ$ , o melhor valor para a gravidade, de acordo com esses dados, fica em torno de  $9,784 \text{ m/s}^2$ . Este será o valor esperado, a ser comparado com as medidas realizadas aqui, já que não encontramos na literatura dados experimentais do valor de  $g$  para a região de Teófilo Otoni.

Atividades que visam ao uso da tecnologia no ensino tem sido amplamente divulgadas. Citamos aqui alguns trabalhos que utilizam o *software* livre Tracker em atividades diversas de física ou matemática, como por exemplo, Bonventi (2015), Figueira (2015), Heideman (2012), Jesus et al (2014), Jesus (2014), Leitão et al (2011), Sirisathitkul et al (2013) e Magarinus (2013). Muitos outros estão disponíveis quando se procura por “Tracker” na rede mundial de computadores, em diferentes atividades envolvendo o movimento dos corpos, mostrando que este *software* é extremamente aplicável e traz excelentes resultados experimentais.

Neste artigo vamos apresentar as medidas da aceleração da gravidade realizadas por um grupo de estudantes no *campus* Mucuri utilizando um pêndulo simples e imagens de vídeos que foram tratadas posteriormente com o Tracker. A motivação deste trabalho é parte de um projeto que visa ao uso de *softwares* livres

---

<sup>1</sup> Maiores detalhes podem ser obtidos na referência Nussenzveig (2013), no capítulo que trata de forças de inércia.

no ensino de Física e Matemática, que já rendeu resultados animadores, como se observa em Jardim et al (2015), Silva et al (2016), Silva et al (2017), Pereira et al (2017) e Jardim et al (2017).

Observamos muitas vantagens no uso do Tracker nesse estudo, desde a melhora da precisão na medida do tempo, implicando numa menor incerteza no valor de  $g$ , algo que motiva os alunos, até o fato de que a filmagem permite que o movimento seja melhor analisado, explorado e entendido por eles. No momento final da análise outro *software* livre, denominado Maxima<sup>2</sup>, foi utilizado na computação algébrica e na obtenção de gráficos. Por se tratar, ambos, de *softwares* livres não foi preciso dispor de recursos financeiros para adquiri-los. Também não houve a necessidade de comprar material para montar os aparatos, já que foram utilizados objetos comuns, encontrados facilmente.

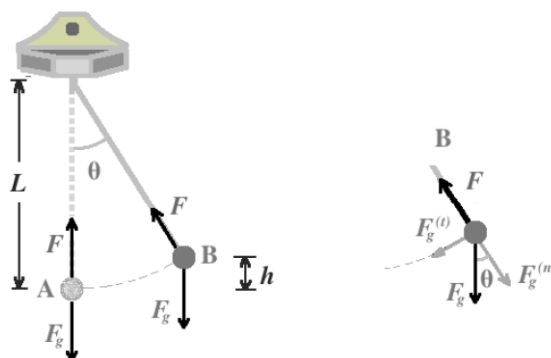
## **2. O uso do pêndulo simples para medir o valor de $g$**

A utilização de um aparato simples como o pêndulo aqui descrito para investigar o efeito gravitacional se deve, inicialmente, à contribuição das observações e dos estudos realizados por Galileu Galilei no fim do século XVI. Alguns relatos afirmam que Galileu observava o balanço do lustre da catedral de Pisa quando percebeu que ele apresentava um movimento periódico cujo período (tempo de uma oscilação) independeria da amplitude de oscilação<sup>3</sup>. Com essa consideração, os objetos que se comportam como o lustre da catedral, chamados de pêndulos simples, podem ser utilizados para medir o valor da aceleração da gravidade, simplesmente pelas medidas diretas dos períodos de oscilação para cada tamanho de fio.

---

<sup>2</sup> Maiores informações podem ser obtidas diretamente no endereço eletrônico <http://maxima.sourceforge.net/>

<sup>3</sup> Esta conclusão é denominada de Lei de isocronismo das oscilações do pêndulo, mas vale apenas para pequenas amplitudes de oscilação, como será discutido posteriormente.



**Figura 1** - À esquerda está representado um pêndulo simples de comprimento  $L$ . Sua posição de equilíbrio ocorre em A. Quando abandonado da altura  $h$  (em B) ele irá oscilar, buscando sempre restaurar a situação de equilíbrio. À direita está o diagrama de corpo livre para a massa pendular. Os vetores  $F_g^{(n)}$  e  $F_g^{(t)}$  são as componentes do peso  $F_g$  (normal e tangencial à trajetória, respectivamente) e  $F$  é a tensão no fio.

Por definição, um pêndulo simples é um aparato formado por um fio ou haste não flexível, inextensível e de massa desprezível, preso a um suporte em uma de suas extremidades e que sustenta um corpo de massa  $M$  na outra extremidade. A Figura 1 apresenta um pêndulo simples cujo comprimento é  $L$ . Quando deslocada da posição vertical (situação **A** mostrada na imagem) por um ângulo  $\theta$  (situação **B**), a massa irá oscilar, a partir de uma altura  $h$ , em torno do ponto de equilíbrio **A**.

A obtenção da equação de movimento para o pêndulo pode ser feita pela aplicação da segunda lei de Newton. Esse conteúdo é visto pelos estudantes no segundo período do curso de Ciência e Tecnologia, na unidade curricular denominada Fenômenos Mecânicos, pouco antes da metade do semestre letivo. Um estudo mais completo do pêndulo, por exemplo abordando a conservação de energia, pode trazer muitos benefícios na compreensão de conceitos físicos importantes. Entretanto, nessa atividade restringiu-se ao pêndulo simples para a medida da aceleração da gravidade local, analisando os erros provenientes das aproximações adotadas e daqueles que são inerentes ao próprio procedimento experimental.

Na Figura 1 é possível observar as forças que agem na massa pendular, onde  $F$  é a força proveniente da tensão do fio e  $F_g$  é a força gravitacional que a Terra exerce sobre o corpo. Exatamente no instante em que a massa é abandonada da altura  $h$  existem somente essas duas forças atuando, mas à medida em que o sistema oscila aparecem forças de resistência que dependem de alguns fatores e

que podem ser muito complicadas de se avaliar. Entretanto, se essas forças forem desprezíveis no tratamento experimental que se pretende, o pêndulo, nesse modelo, estará sujeito apenas às forças de tensão do fio e do efeito gravitacional. Em alguns casos, no estudo do movimento dos corpos, não é uma escolha muito adequada considerar um modelo teórico em que se despreza o efeito da resistência do ar, especialmente quando as velocidades não forem baixas, já que o arrasto depende da velocidade. Porém, para o pêndulo essa aproximação é bastante razoável, particularmente por seu movimento ser lento em comparação com outros, como será discutido no texto.

A trajetória que a massa pendular descreve no plano do papel durante a oscilação é dada por um arco da circunferência. A força resultante que governa o movimento do pêndulo é dada pela soma vetorial de  $\mathbf{F} + \mathbf{F}_g$ . Como a tensão no fio é sempre perpendicular à trajetória, pode-se escolher um sistema de coordenadas conveniente, tal que um eixo esteja sempre na direção radial e outro na direção tangencial à trajetória. Nessa escolha, a tensão mantém constante sua direção radial, mas a força gravitacional muda de direção durante o movimento, pois se mantém constantemente na direção vertical.

As acelerações tangencial e radial podem ser obtidas pela segunda Lei de Newton, analisando o diagrama de corpo livre apresentado na Figura 1. É possível observar que na direção radial existem dois vetores, ou seja,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}_g^{(n)}$ , cuja resultante provoca a aceleração radial  $\mathbf{a}_r$ . Por outro lado, na direção da trajetória existe apenas o vetor  $\mathbf{F}_g^{(t)}$ , que provoca a aceleração tangencial  $\mathbf{a}_t$ . A aceleração radial é também chamada de centrípeta e é responsável por obrigar a massa pendular a realizar a trajetória curva. Dessa maneira, aplicando a segunda Lei de Newton para a massa oscilante, tem-se as seguintes equações:

$$m \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_g^{(r)} \rightarrow m a_r = F - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$m \vec{a}_t = \vec{F}_g^{(t)} \rightarrow m a_t = -mg \sin \theta \quad (2)$$

Como as acelerações radial e tangencial, pelas definições, são

$$a_r = \frac{v^2}{L} \quad \text{e} \quad a_t = \frac{d^2}{dt^2}(L\theta)$$

onde  $L$  é o raio da circunferência, as equações que governam o movimento pendular

serão:

$$\frac{v^2}{L} - \frac{F}{m} + g \cos \theta = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

Observa-se que a (4) é uma equação diferencial não-linear que governa o movimento do pêndulo, em relação à coordenada angular. Essa expressão mostra que o movimento oscilatório do pêndulo não depende de sua massa. Entretanto, ela não possui uma solução analítica<sup>4</sup>, que tenha validade para qualquer caso. Ou seja, não é possível obter uma solução exata de  $\theta(t)$  para a equação do pêndulo, que possibilite compreender seu comportamento completamente. Apesar disso, no nível de estudo que se deseja aqui, pode-se propor uma situação particular considerando uma aproximação para pequenas amplitudes, tal que tenha  $\sin \theta \approx \theta$ . Daí,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (5)$$

se torna uma equação que é análoga à expressão para o oscilador harmônico simples (OHS):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{onde} \quad \omega^2 = \frac{g}{L} . \quad (6)$$

Imediatamente, por comparação da (5) com a (6), sabendo que o tempo de uma oscilação completa é dado pela relação  $T = 2\pi/\omega$ , o período de oscilação do pêndulo simples será:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (7)$$

Esta relação permite obter o valor de  $g$  experimentalmente apenas medindo o comprimento do pêndulo e seu período de oscilação, desde que se opere apenas com pequenas amplitudes. Sendo assim, foi solicitado que os alunos avaliassem o domínio de validade da equação (7) para a medida realizada nesta atividade experimental. Em pesquisas bibliográficas verificou-se que, de acordo com

---

<sup>4</sup> Através dos recursos computacionais é possível obter soluções numéricas para a equação do pêndulo. Outra possibilidade é recorrer ao princípio da conservação de energia, que permite obter a expressão exata para o período de oscilação do pêndulo, para uma amplitude qualquer, sem precisar resolver a equação diferencial dada pela (4).



Nussenzveig (2002, p.48), para amplitudes de até  $10^\circ$  o erro relativo para a aproximação  $\sin\theta \approx \theta$  na solução da equação diferencial ficaria em torno de 0,5%. Para Machado (2000, p.516), desde que se tenha  $\theta \ll 1$  a aproximação é bastante razoável, pois o termo de terceira ordem que aparece na expansão do  $\sin\theta$  é muito menor que o termo de primeira ordem.

Neste trabalho os alunos utilizaram amplitudes de  $15^\circ$ , de forma que o erro relativo para a aproximação fica em torno de 1%. O aparato foi cuidadosamente montado para que o efeito do atrito do fio com o suporte e o efeito resistivo do ar fossem desprezíveis. Além disso, o fio possuía massa muito menor que a do corpo oscilante, isto é, menos de 2% para o maior comprimento utilizado, podendo afirmar que toda a massa relevante estava concentrada no corpo, como se esperaria para o caso de um pêndulo simples.

### 3. Utilizando o *software* para a coleta de dados

O Tracker é um *software* livre criado em parceria com a *Open Source Physics*, cujo projeto foi patrocinado pela Fundação Nacional da Ciência dos Estados Unidos (NSF, *National Science Foundation*).<sup>5</sup> Este programa possibilita a análise de vídeos, produzidos com o auxílio de uma câmera filmadora, para diferentes movimentos de corpos. A limitação na determinação da posição do objeto na tela durante a captura dependerá da configuração da câmera. Entretanto, para baixas velocidades a determinação da posição do corpo é bastante confiável, e a coleta automática apresenta ótimos resultados mesmo quando se utiliza um celular que possua câmera de qualidade inferior.

A coleta de dados da posição do corpo em cada instante, feita pelo Tracker, dependerá do arquivo do vídeo que será exportado para dentro do aplicativo. Para isso será necessário colocar uma escala próxima ao objeto que se deseja observar durante a filmagem. Essa escala servirá de parâmetro para que o programa identifique as distâncias na tela e realize o procedimento de coleta corretamente.

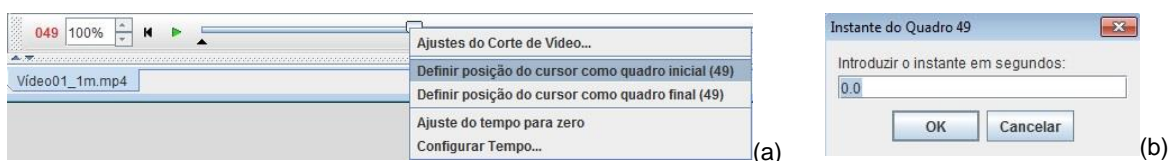
Esse *software* é muito fácil de ser utilizado, além de possuir tutoriais na rede mundial de computadores, facilitando sua utilização. Mesmo assim, os alunos

---

<sup>5</sup> Maiores informações a respeito do funcionamento do *software* e sua disponibilização para instalação podem ser encontradas em <<http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365>>

receberam uma breve introdução a respeito do funcionamento do programa e das etapas que deveriam seguir. Vamos descrever brevemente as três etapas que os alunos seguiram, de modo que o leitor, se desejar, reproduza a tarefa sem dificuldades.

**Etapa 1** - Depois de instalado é preciso abrir o Tracker e importar o arquivo da filmagem através da opção “abrir”, escolhendo o filme que será analisado. Em seguida, é preciso ajustar alguns parâmetros, como o intervalo da filmagem no qual se dará a coleta automática de dados. Este ajuste é feito na barra de ferramentas na parte inferior da tela. Para o primeiro caso, mostrado na Figura 2a, selecionamos “Definir posição do cursor como quadro inicial” e posicionamos onde desejamos que a análise comece. Em seguida escolhemos “Configurar Tempo”, colocando “0.0” na caixa de texto apresentada na Figura 2b. Novamente, na Figura 2a, precisaremos determinar o final da análise escolhendo posicionando o cursor onde desejarmos e “Definir posição do cursor como quadro final”.



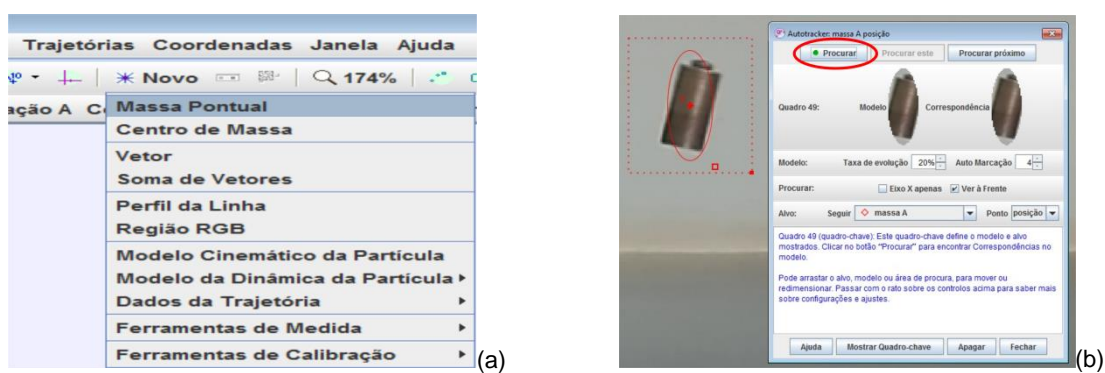
**Figura 2** - Interface do Tracker mostrando (a) a determinação do intervalo de observação e (b) a configuração do tempo inicial da coleta.

**Etapa 2** - Para o ajuste que determina a escala de medida de distância deve-se abrir a barra de ferramentas, que fica na parte superior, e escolher a fita métrica, conforme se observa na Figura 3a. O ajuste da escala é dado pelo padrão de medida colocado pelo usuário na filmagem, através de uma régua, ou de um papel graduado, por exemplo, conforme se observa na Figura 3b. A régua é ajustada entre dois valores na tela, informando ao programa que valor será atribuído como parâmetro.



**Figura 3** - Interface do Tracker (a) para a seleção do comando bastão de calibração e (b) para a determinação do padrão de medida pelo usuário.

**Etapa 3** - Esta etapa consiste em informar ao *software* qual será o objeto analisado, escolhendo na barra de ferramentas a opção “Novo” e, em seguida, “Massa Pontual”, conforme se verifica na Figura 4a. Por fim, pressionando as teclas Shift+Ctrl, selecionando o objeto a ser analisado e clicando em “Procurar”, conforme apresentado na Figura 4b, o *software* dará início à coleta automática, gerando tabela de dados e diferentes gráficos.



**Figura 4** - Interface do Tracker mostrando (a) a seleção da opção “Novo” e a escolha da “Massa Pontual” e (b) a seleção do objeto a ser analisado para a coleta automática de dados.

#### 4. Procedimento para o cálculo de $g$

A atividade descrita neste trabalho foi realizada em março de 2017 no rol do prédio do Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia (ICET) da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), em Teófilo Otoni.

O pêndulo simples foi montado utilizando-se uma linha de anzol e um pequeno cilindro de metal de 95 gramas. À medida em que se completavam 5 repetições de uma oscilação aumentava-se o fio e retomava-se as filmagens, até completar a quantidade de pontos desejada.

##### 4.1 - Primeira coleção de dados - utilizando uma câmera filmadora

O pêndulo foi montado considerando os comprimentos do fio previamente calculados, de modo que os pontos no gráfico ficassem equidistantes quando plotados em escala logarítmica. O menor comprimento utilizado foi de 0,100(1)

metros, seguido de comprimentos obtidos através de um fator multiplicativo de 1,25, num total de 22 comprimentos diferentes, de modo que, com essa quantidade de pontos no gráfico, seria possível obter duas décadas logarítmicas, aumentando a confiabilidade do ajuste ao modelo teórico.

Para se obter um bom resultado experimental foram realizadas 110 gravações de vídeos, correspondendo a 5 repetições de filmagens para cada tamanho de fio. Posteriormente foram obtidas as médias, possibilitando a correção de erros oriundos do tratamento das imagens que ocorrem devido à limitação dada pela taxa de captura de vídeo da câmera filmadora, como será discutido à frente.

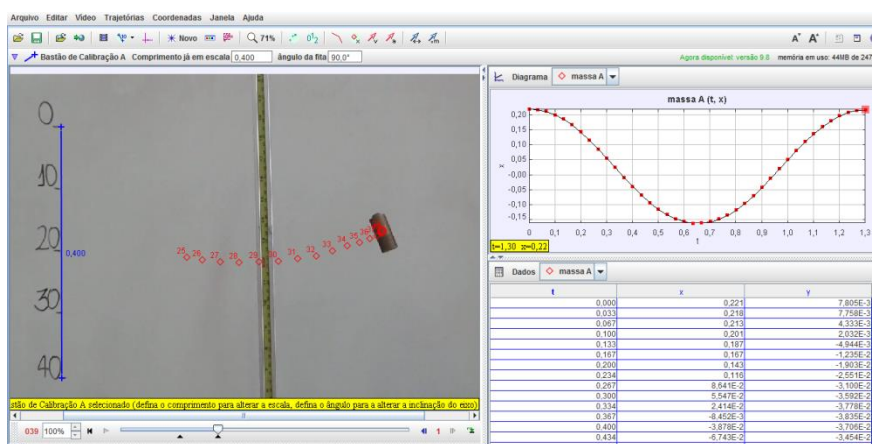
Para cada caso foi preciso posicionar a câmera de modo que se pudesse capturar todo o movimento da massa, procurando ajustar o plano da imagem com o plano de oscilação, especialmente para os fios de maiores comprimentos, evitando-se o efeito da paralaxe.

Para a gravação dos vídeos os alunos utilizaram uma câmera fotográfica digital Canon Powershot G12. O equipamento possui uma lente objetiva angular de 28mm com zoom ótico de 5x, resolução de 10 megapixels, e captura vídeos com uma taxa de 24 quadros/segundo<sup>6</sup> com a qualidade de 1280x720p HD. Além disso, possui estabilizador de imagem óptico que evita a desfocagem e reduz os efeitos de trepidações, melhorando a identificação da posição do objeto na tela.

Abrindo o arquivo da filmagem no Tracker e seguindo os passos descritos na seção 3, o *software* realiza a coleta automática de dados, fornecendo o gráfico da posição do objeto em função do tempo e a tabela de dados, conforme se observa na Figura 5, à direita na imagem. Os pontos sequenciais na imagem à esquerda na Figura 5 representam as posições referentes ao deslocamento do centro de massa do corpo. Seria o rastro que o centro de massa, determinado pelo usuário, deixa na tela. A densidade maior de pontos ocorre na proximidade do ponto mais alto da trajetória, onde o objeto tem sua velocidade reduzida, parando instantaneamente quando se encontra no topo, o ponto **B** da Figura 1 já discutida.

---

<sup>6</sup> Câmeras capazes de capturar uma quantidade maior de quadros por intervalo de tempo apresentam melhores resultados na videoanálise, pois permitem obter uma quantidade maior de dados e, conseqüentemente, melhor aproximação do valor esperado.



**Figura 5** - Tela característica do Tracker. À esquerda tem-se a imagem do pêndulo oscilando e da captura automática de dados relativos ao movimento. À direita, na parte superior, trata-se do gráfico de uma oscilação e na parte inferior da tabela de dados contendo o tempo e as posições vertical e horizontal do objeto na tela.

Com a câmera utilizada nessas filmagens o menor intervalo de tempo entre duas coletas, isto é, entre dois pontos vizinhos quaisquer marcados na Figura 5, à esquerda, é de  $1/24$  s, ou seja, 0,0417 segundos. Esse tempo corresponde, no fio de menor comprimento, a um percentual de 6,6% do período e no fio de maior comprimento a um percentual menor que 1%. Entretanto, esses valores só seriam considerados em sua totalidade se o objeto chegasse ao topo da trajetória, tanto na primeira metade quanto na segunda metade de uma oscilação, entre dois quadros sucessivos da captura das imagens que ocorreriam na mesma posição absoluta na tela. Somente neste caso o erro devido à leitura teria seu valor máximo, dado por 0,0833 s. Assim, a informação acerca do ponto mais alto da trajetória poderia ser interpretada erroneamente.

Apesar de ser pouco provável que esses acontecimentos ocorram frequentemente e de maneira sistemática, é preciso buscar formas de minimizar esse efeito. Uma possibilidade seria utilizar câmeras capazes de capturar uma quantidade maior de quadros por intervalo de tempo, mas isso limitaria a atividade condicionando-a à existência de recursos financeiros para adquirir a filmadora. Outra opção, que foi a opção escolhida pelos estudantes neste trabalho, seria proceder a repetição das filmagens e determinar a média dos valores para cada período, considerando seu respectivo comprimento. Este procedimento minimiza consideravelmente os erros experimentais.

## 4.2 - Análise do valor de $g$ para o primeiro conjunto de dados

O valor da aceleração da gravidade foi medido de forma indireta utilizando a equação (7) referente ao período de oscilação do pêndulo para pequenas amplitudes. Os valores do comprimento  $L$  e do período de oscilação  $T$  foram as quantidades medidas diretamente, com o auxílio do *software*. Com isso, reorganizando a equação (7) na forma

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} L^{1/2} \quad (8)$$

onde  $T$  e  $L$  são os parâmetros medidos e  $2\pi/\sqrt{g}$  é uma constante, é possível estimar o valor de  $g$ , por meio do ajuste da função aos pontos experimentais plotados no gráfico.

Observando a (8) os alunos identificaram que se tratava de uma lei de potência, tal que,

$$T = b L^a \quad (9)$$

onde  $a = 1/2$  e  $b = 2\pi/\sqrt{g}$  são constantes. Escrever uma expressão na forma de uma lei de potência é muito útil, pois sua representação gráfica, convenientemente expressa em escala logarítmica, é uma reta, facilitando o estudo. Pode-se comprovar a afirmação acima aplicando, por exemplo, logaritmo neperiano  $\ln$  em ambos os lados da equação (9),

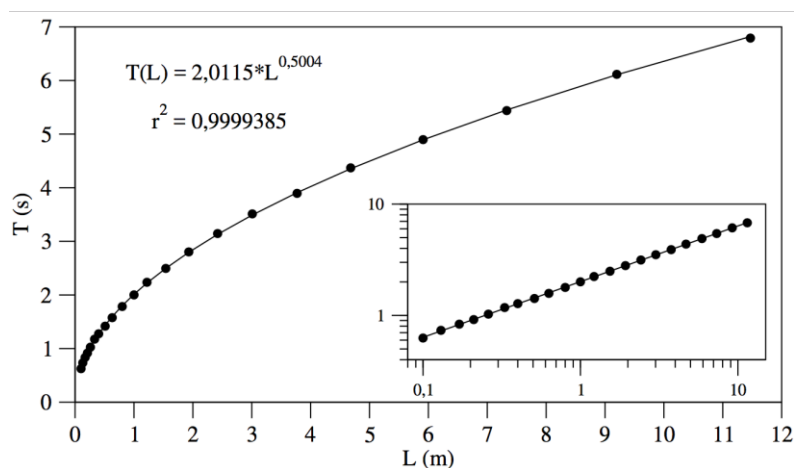
$$\ln(T) = \ln(b L^a)$$

e utilizando, em seguida, as propriedades dos logaritmos, ou seja,

$$\ln(T) = \ln(b) + a \ln(L). \quad (10)$$

A (10) tem a mesma forma que se observa numa função afim, isto é,  $f(x) = n + mx$  em que  $n = \ln(b)$  é o coeficiente linear e  $m = a$  é o coeficiente angular. Desse modo, o cálculo de  $g$  foi obtido a partir do coeficiente linear da reta mais

adequada aos pontos experimentais, por meio do ajuste linear, através do método dos mínimos quadrados. Os alunos também analisaram o ajuste da função, considerando a expressão dada pela (9), onde o valor de  $g$  foi ratificado, em comparação com a (10).



**Figura 6** - Representação da curva característica do período de oscilação do pêndulo simples em função do comprimento, para pequenas amplitudes, a partir dos dados experimentais. Na parte inferior, à direita, trata-se do gráfico dos mesmos valores, porém com os eixos em escalas logarítmicas, mostrando sua forma linear e duas décadas logarítmicas completas.

A Figura 6 representa a curva característica do período de oscilação do pêndulo simples em função de seu comprimento. O ajuste linear, em decorrência da lei de potência, está apresentado no quadro menor da mesma figura, na parte inferior à direita. O melhor ajuste fornecido pelo programa, quando se sugere o uso de um modelo descrito pela equação (9), é dado pela função

$$T(L) = 2,0115 L^{0,5004} . \quad (11)$$

A tarefa permitiu que os alunos avaliassem a relação do ajuste da função que descreve o modelo teórico aos dados experimentais. Por exemplo, o fato do expoente ser igual a  $\frac{1}{2}$  na equação não significaria que teria que ser exatamente 0,5 na função ajustada, já que o modelo teórico é uma situação ideal e a função obtida corresponde ao melhor ajuste dos pontos experimentais, sendo, portanto, a situação real. Apesar dos estudantes entenderem que não seria possível obter uma expressão para o ajuste que fosse exata, comparada com a equação do modelo teórico, foi sugerida a realização de novo experimento, utilizando a câmera de um

celular e com outra forma de linearização da expressão (7). Essa etapa será discutida na seção seguinte.

Com esse experimento, dado que

$$b = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}, \text{ ou seja, } g = \left( \frac{2\pi}{2,0115} \right)^2$$

o valor da aceleração da gravidade obtido foi:

$$g = 9,757(4)m/s^2.$$

Esse resultado mostra que os dados coletados foram muito bons, com um grau de confiabilidade bastante aceitável, apresentando um excelente valor para  $g$ . O ajuste da função aos pontos experimentais também foi muito bom, já que  $r^2$ , como se observa na Figura 6, ficou muito próximo da unidade se tomarmos até a quarta casa decimal para a aproximação. Além disso, o erro relativo, considerando o valor esperado para a região, foi extremamente pequeno, menor que 0,3%, isto é,

$$\epsilon = \frac{9,784 - 9,757}{9,784} \times 100\% = 0,276\% .$$

Durante as pesquisas bibliográficas, que deram origem a este texto, os estudantes encontraram diferentes trabalhos que sugerem a realização da mesma atividade, utilizando o pêndulo simples para medir  $g$ . Entretanto, em nenhum dos casos pesquisados o comprimento do fio alcançou valores tão grandes e com uma quantidade de dados experimentais tão expressiva, permitindo avaliar os efeitos resistivos e a validade das aproximações feitas aqui.

#### **4.3 - Segunda coleção de dados - utilizando a câmera de um celular**

Esta segunda prática foi realizada utilizando a câmera de um celular comum e 5 comprimentos para o pêndulo. Ainda com o intuito de diminuir os erros oriundos do limite de quadros da câmera, quando da determinação do tempo de oscilação, foram realizadas 5 repetições de filmagens para cada tamanho de fio. Os comprimentos para o pêndulo utilizados nessa medida foram, em sequência, 0,500(5) m, somando-se 50 cm a cada novo tamanho até completar 5 quantidades, ou seja, até o comprimento final de 2,500 m.



Os vídeos foram gravados utilizando-se um celular da marca Motorola, modelo Moto G4 Play. A taxa de captura de dados informada pelo fabricante é de 30 quadros/segundo, porém a resolução da imagem é inferior à da câmera filmadora descrita na seção 4.1, o que poderia dificultar a coleta automática feita pelo Tracker posteriormente. Entretanto, observou-se uma perda muito pequena referente à resolução das imagens na filmagem, justamente por se tratar de movimento com velocidades baixas, além da utilização de fios de comprimentos menores, tal que o aparelho de celular não precisasse se afastar muito para capturar a imagem completa da oscilação.

Com essa câmera o intervalo de tempo de cada quadro é de 0,0333s, ou seja, um ganho de 0,0084s se comparado com a câmera utilizada na primeira atividade, podendo compensar as perdas em razão da qualidade da imagem.

#### 4.4 - Estimativa do valor de $g$ para o segundo conjunto de dados

Nessa atividade a ideia foi trabalhar com outra equação linearizada para o período, como sugere Lopes (1988), em função do número reduzido de dados. Assim, reescrevendo a equação (7) na forma

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{g} \right) L, \quad (12)$$

é possível obter  $g$  através do coeficiente angular da reta de  $T^2$  em função de  $L$ , já que esse termo carrega a informação da aceleração da gravidade.

A Figura 7 apresenta o gráfico da função de  $T^2 \times L$ , linearizada, portanto. A imagem miniaturizada, na parte inferior à direita da Figura 7, refere-se aos pontos experimentais plotados em escala logarítmica. A quantidade de pontos, como se vê, não completaram uma década logarítmica e a função ajustada apresentou alguns pontos que mereceram uma análise pormenorizada.

Com um número pequeno de pontos experimentais para fazer o ajuste da função e uma qualidade de imagem ligeiramente inferior na videoanálise o valor de  $g$  apresentou um resultado um pouco mais distante do valor esperado. A reta ajustada aos pontos plotados no gráfico de  $T^2 \times L$  apresentou a seguinte função:

$$T^2(L) = 0,032763 + 4,0609 L, \quad (13)$$

onde 0,032763 é o coeficiente linear e 4,0609 o coeficiente angular. Este último é quem carrega a informação acerca de  $g$ , uma vez que,

$$\left(\frac{4\pi^2}{g}\right) = 4,0609,$$

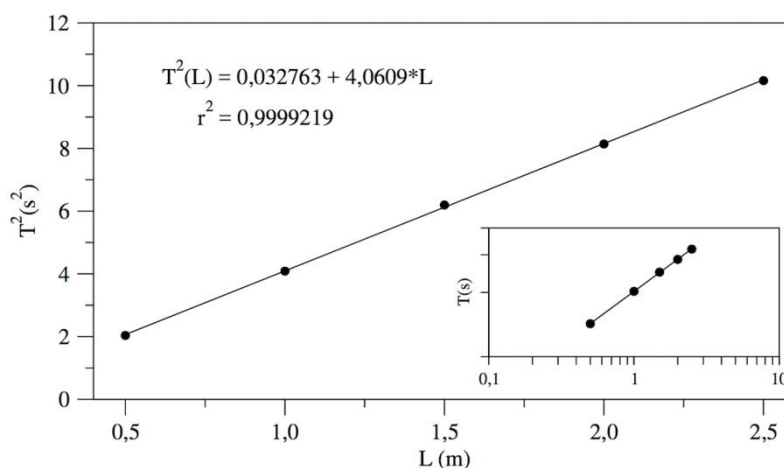
ou seja,

$$g = 9,722(6) \text{ m/s}^2.$$

Esse resultado, que consideramos muito bom, apresenta um erro em relação ao valor esperado de menos de um por cento, isto é,

$$\epsilon = \frac{9,784 - 9,722}{9,784} \times 100\% = 0,634\%.$$

Comparando a (12) com a (13) observa-se que a primeira não possui coeficiente linear como a segunda, isto é, na equação que descreve o modelo teórico essa quantidade é nula enquanto que na função ajustada ele existe. Apesar disso, trata-se de um valor bem pequeno pois quando o comprimento do fio se aproxima de zero o período tende a 0,181s, que seria o tempo de oscilação para um comprimento menor que 1cm, portanto desprezível. Esse coeficiente linear, representado por  $T(0)^2 = 0,032763\text{s}^2$ , surge quando se faz o ajuste da função aos pontos experimentais, e trata-se de uma quantidade residual. Entretanto, como  $r^2 = 0,9999219$  é bem próximo da unidade o ajuste pode ser considerado muito bom. Outra avaliação acerca desse resultado é que, mesmo aparecendo um coeficiente linear na função de ajuste, a estimativa de  $g$  é feita utilizando o coeficiente angular, não sofrendo, portanto, influência direta do deslocamento vertical da reta.



**Figura 7** - Representação gráfica dos pontos experimentais obtidos com o recurso da câmera de celular, cujo ajuste linear é dado pela equação (12). Na parte inferior, à direita, trata-se dos mesmos pontos experimentais plotados em escala logarítmica, mostrando que não se completa uma década.

Por outro lado, quando se tenta avaliar a aceleração da gravidade por meio de um ajuste usando a (9), que é uma lei de potência, o resultado fica em torno de  $9,665 \text{ m/s}^2$ , ainda mais distante do valor esperado. O número limitado de pontos acaba prejudicando o ajuste nesse caso. Sendo assim, com poucos pontos experimentais o ajuste linear por meio da (12) é, de fato, a melhor escolha.

## 5. Análise e discussão dos resultados

Nas atividades aqui descritas o período de cada oscilação é feito sem a necessidade de tirar a média do tempo de  $n$  oscilações, como ocorre ao se utilizar cronômetros na medida do tempo. Além disso, como a velocidade que o pêndulo atinge é muito pequena, o fato de se desprezar a resistência do ar é uma boa aproximação, mas ainda assim os estudantes fizeram a análise da perda nas oscilações para diferentes comprimentos do fio considerando o primeiro conjunto de dados, que utilizou 22 pontos.

Observou-se que, para os menores comprimentos do pêndulo, de até quatro metros, não houve perda de amplitude significativa. A imagem de uma oscilação para este caso está representada na parte superior da Figura 8, relativa ao comprimento de 21cm. Para os comprimentos entre quatro e sete metros a perda de amplitude durante a primeira oscilação não alcançou o percentual de 2%. Apenas para o pêndulo de maior comprimento, com 11,47m, cuja oscilação está mostrada na parte inferior da Figura 8, a perda percentual de amplitude foi maior, ficando em torno de 6,8%.

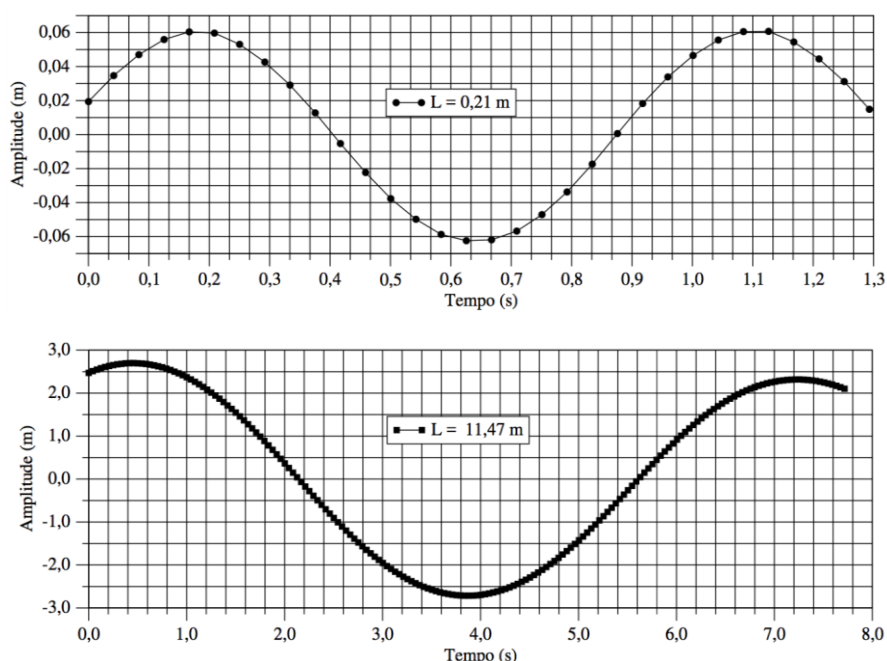
Apesar disso, os pêndulos de comprimentos maiores apresentam os melhores resultados na determinação do período de oscilação, pois o número de pontos na coleta de dados é maior para os maiores valores do período, que obviamente ocorre para os maiores comprimentos do pêndulo.

Como o efeito resistivo foi analisado e mostrou não comprometer o resultado, o passo seguinte foi avaliar a aproximação do período para pequenas amplitudes. Para isso é preciso obter a equação do período com a dependência angular. Na

referência Baker & Blackburn (2005) pode-se encontrar o estudo do pêndulo não linearizado, cujo período, para o caso que estamos considerando aqui, é dado pela série

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots \right] \quad (14)$$

onde o termo entre colchetes é o fator de correção em relação ao período para a aproximação linear descrita pela (7).



**Figura 8** - Representação de uma oscilação completa para análise da perda por amortecimento nesse intervalo de tempo. Na imagem superior trata-se do pêndulo de 21 cm e na inferior o de 11,47 cm.

Com a (14), considerando os três primeiros termos nos colchetes, os estudantes avaliaram o período para a amplitude utilizada no experimento, mostrando que a correção estaria na terceira casa decimal, isto é,  $T = T_0 1,00400$ , sendo  $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$  o valor do período do pêndulo para o caso linear, usado nesse experimento. Pode-se utilizar um *software* para o cálculo da (14), com um número maior de termos. Mas, considerando a precisão neste experimento, entendeu-se que a correção não seria apreciável, não sendo necessário explorar mais que isso. Mesmo assim, a tarefa permitiu que os alunos percebessem que o isocronismo é uma aproximação, já que o período depende da amplitude, ou seja, trata-se de um caso particular para pequenas amplitudes do pêndulo linear.

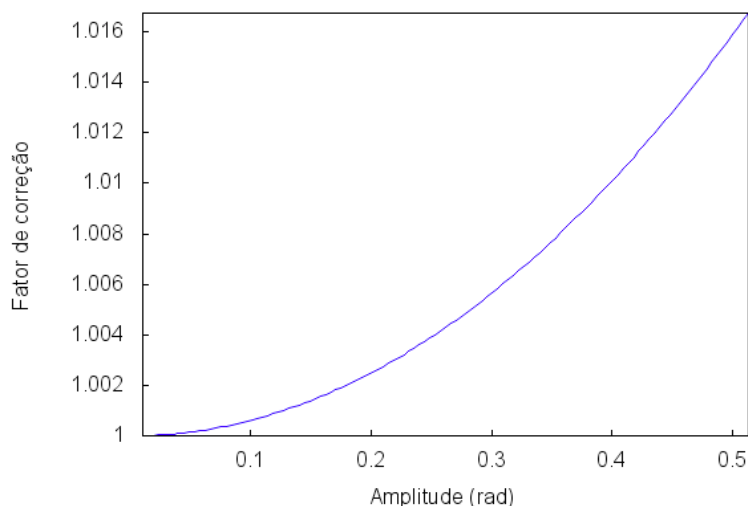


Figura 9 - Representação gráfica do fator de correção para o período em função da amplitude, mostrando que ele depende da amplitude, mas é pouco representativo para a amplitude de oscilação de 0,2618 radianos, que equivale a 15°, utilizada no experimento.

Com o uso do software livre Maxima o gráfico que representa o período de oscilação em relação à amplitude, mostrado na Figura 9, foi produzido e analisado. Foi possível observar que na aproximação para pequenas amplitudes de oscilação, como a que se utilizou nas tarefas descritas aqui, o limite de validade é perfeitamente aceitável.

## Considerações finais

O uso de *softwares* livres em atividades de ensino no curso de Ciência e Tecnologia da UFVJM, *campus* Mucuri, é um grande motivador para os estudantes. O incentivo ao uso da tecnologia na resolução de problemas é um dos pilares apontados no Projeto Político Pedagógico, dentre outras coisas, como forma de auxiliar o processo de ensino-aprendizagem para esse modelo de curso cujas turmas são bastante numerosas.

A medida da aceleração da gravidade com o recurso do *software* livre Tracker foi muito interessante, por vezes ocorrendo situações não previstas por sugestão dos próprios estudantes. A montagem do aparato exigiu dos alunos melhor entendimento do funcionamento do pêndulo e dos procedimentos das medidas para obtenção de resultados mais precisos. Como complemento, o *software* livre Maxima auxiliou na visualização gráfica e no cálculo do período pela equação da conservação de energia, que foi além da atividade aqui descrita.

O uso do pêndulo simples é sempre uma ótima escolha proporcionando aos alunos conhecimentos gerais, bem como mais específicos, sobre o movimento dos corpos, aplicando conceitos já estudados e aprofundando em outros não vistos em sala de aula. O aparato é simples de montar e permite a utilização de material de uso cotidiano, sem gastos com o experimento, o que se traduz numa excelente justificativa já que o laboratório de ensino da Instituição tem poucos recursos.

O resultado obtido para a medida da aceleração da gravidade, se comparado com o valor esperado para a região de Teófilo Otoni, especificamente no *campus* da UFVJM, foi muito bom, mesmo quando a câmera de um celular comum foi utilizada, cuja qualidade da imagem é mais baixa frente às filmadoras em *high definition* (HD). A estimativa dos erros e incertezas, em acordo com Taylor (2012), também auxiliaram na construção do conhecimento dos conceitos estudados na teoria.

Por fim, o uso do programa Maxima na obtenção de gráficos e cálculos durante o trabalho permite que o aluno perceba a vantagem de se utilizar esse *software* de computação algébrica em tarefas dessa natureza, sendo incentivado seu uso em atividades futuras.

## Referências

BAKER, G. L.; BLACKBURN, J. A. **The pendulum: a case study in physics**. Oxford University Press, 2005.

BONVENTI, JR. W.; ARANHA, N. Estudo das oscilações amortecidas de um pêndulo físico com o auxílio do “Tracker”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, p. 2504, 2015.

FIGUEIRA, Jalves S. Ressonância em bússolas acopladas. **Revista Brasileira de Ensino Física**, São Paulo, v. 37, n. 1, 1302, Mar. 2015.

HEIDEMANN, L. A., ARAUJO, I. S., & VEIT, E. A. (2012). Ciclos de modelagem: uma proposta para integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no ensino de física. **Caderno brasileiro de ensino de física**, Florianópolis. Vol. 29, nesp 2 (out. 2012), p. 965-1007.

JARDIM, D.F. et al. Estudando Limites com o GeoGebra. **Vozes dos Vales**, v. 8, p. 7-25, 2015.

JARDIM, D.F. et al. O Laboratório Virtual como espaço para a aprendizagem de conteúdo da análise dimensional – um relato de experiência do uso do GeoGebra no ensino de física. **Vozes dos Vales**. Ano VI, n. 11, p. 1-19, mai. 2017.

JESUS, V.L.B. **Experimentos e videoanálise – Dinâmica**. São Paulo: Livraria da Física, 2014, 1ª edição.

JESUS, V.L.B.; BARROS, M.A.J. As múltiplas faces da dança dos pêndulos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 4, p. 01-07, 2014.

LEITÃO, L.I.; TEIXEIRA, P. F. D.; DA ROCHA, F. S. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 6, n. 1, 2011.

LOPES, C. de O. Uma contribuição didática ao estudo experimental da aceleração devido à gravidade local. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 5, n. 1, p. 28-35, 1988.

LOPES, W. Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 25, n. 3, p. 561-568, 2008.

MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas à física**. Editora UEPG, 2004. p.56.

MAGARINUS, R. Uma proposta para o ensino de função através da utilização de objetos de aprendizagem. 2013. 100f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2013.

NUSSENZVEIG, H.M., **Curso de Física Básica**, v.1, Mecânica (Editora Edgard Blucher Ltda., 2013), 5ª Edição.

NUSSENZVEIG, H. M., **Curso de Física Básica**, v.2, Fluidos, Oscilações e Ondas

(Editora Edgard Blucher Ltda.,2002), 3ª Edição.

PEREIRA, L.R.; SILVA, J.M.; JARDIM, D.F. Practices for Geometry Teaching with GeoGebra. **International Conference New Perspectives in Science Education**. 1ed.Firenze: Libreria Universitaria, v. 6, p. 1-4, 2017.

SILVA, J.M.; JARDIM, D.F.; CARIUS, A.C. O Ensino e a Aprendizagem de Conceitos de Cálculo Usando Modelos Matemáticos e Ferramentas Tecnológicas.. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 35, p. 70-79, 2016.

SILVA, J. M.; JARDIM, D.F; CARIUS, A. C.; SILVA, A. C. . Teaching Derivatives Concepts with Computational Techniques. **International Conference New Perspectives in Science Education**. 1ed.Firenze: Libreria Universitaria, v. 6, p. 5-8, 2017.

SIRISATHITKUL, C. et al. Digital video analysis of falling objects in air and liquid using Tracker. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 1, p. 1-6, 2013.

TAYLOR, J. R. **Introdução à Análise de Erros: o estudo de incertezas em medições físicas**. Bookman Editora, 2012. 2ª Edição.

Processo de Avaliação por Pares: (*Blind Review* - Análise do Texto Anônimo)

Publicado na Revista Vozes dos Vales - [www.ufvjm.edu.br/vozes](http://www.ufvjm.edu.br/vozes) em: 10/2017

Revista Científica Vozes dos Vales - UFVJM - Minas Gerais - Brasil

[www.ufvjm.edu.br/vozes](http://www.ufvjm.edu.br/vozes)

[www.facebook.com/revistavozesdosvales](https://www.facebook.com/revistavozesdosvales)

UFVJM: 120.2.095-2011 - QUALIS/CAPES - LATINDEX: 22524 - ISSN: 2238-6424

Periódico Científico Eletrônico divulgado nos programas brasileiros *Stricto Sensu*

(Mestrados e Doutorados) e em universidades de 38 países,

em diversas áreas do conhecimento.